SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

3

GODINA IX.
ZAGREB
1958 — 59

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.

Pretplata za 4 broja iznosi Din 240. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uputnicom

SADRŽAJ

Strana

Dr. Ž. Marković, Ruđer Bošković i njegova »Teorija prirodne filozofije 97

Ђ. и Б. Берасимовић, Геометриска метода решавања задатака о екстремним вредностима функција 99

Colombo Lidija, Raman efekt 103

Dragiša A. Stevanović, Deljivost brojeva 107

Sevdić Milenko, O jednoj univerzalnoj formuli za volumene tijela (svršetak) 110

Печијаре Ордан, Вилсонова и дифузиона комора 115

Iz moje radionice i laboratorija: Gramofonska ploča kao optička rešetka (Branka Mikuličić) 120

Zanimljivosti i razno: Prvo takmičenje u matematici učenika zagrebačkih gimnazija — Najjednostavniji dokaz Pitagorina poučka — Prilog adicionim teoremama — O Paskalovom trouglu — Protočni grijači vode — Komet sa dva repa — Како сам организовао такмичење из математике 129

Nove knjige: Dr. D. Mihailović, Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru — Dr. D. S. Mitrinović, Zbornik mat. problema sa prilozima i num. tablicama I, 2. izd. 129

Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike . . 129

Vježbe za učenike gimnazija i srednjih stručnih škola 138

Zadaci na ispitu zrelosti u školskoj godini 1957./58. 142

Matematička ukrštenica . . . . . 3. str. omota

Решење укрштенице из 2 броја . . . . . 4. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA IX. BROJ 3 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1958. — 1959.

Ruđer Bošković i njegova „Teorija prirodne filozofije“

Prof. dr. ŽELJKO MARKOVIĆ, Zagreb

Na više se mjesta ove godine proslavila dvjestagodišnjica Boškovićeva djela *Teorija prirodne filozofije*. Dobro će biti stoga, da se i ovdje pruži kratka karakteristika toga djela zajedno s pregledom uopće Boškovićeva rada. Djelo je izašlo u Beču u jesen g. 1758., gdje se Bošković nalazio u diplomatskom poslu republike Luke (Lucca). U slobodnim časovima, a osobito po završenom diplomatskom poslu, čekajući da se poprave putovi, kojima se morao vratiti u Rim, gdje je živio od 1725. kao pitomac isusovačkog reda, a od g. 1740. kao profesor matematike na tada znamenitom *Collegium Romanum* (Rimski kolegij), završio je Bošković to svoje djelo, na kome je radio trinaest godina.

Već od g. 1745. počeo je Bošković iznositi osnovne misli svoje teorije o silama, koje djeluju u prirodi. Bilo je to u radnji, kojoj je bio predmet mehanički problem t. zv. »živih sila«, zatim, da spomenemo samo neke, g. 1748. u drugom dijelu svoje studije *O svjetlosti* i g. 1754. u raspravi *O zakonu neprekinutosti*, gdje su njegove misli o tom predmetu već konačno ustaljene. Najopširnije je predočena Boškovićeva teorija u djelu navedenom u početku, kome potpun naslov glasi: *»Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila, koje djeluju u prirodi«*. To je i najveći rad njegov iz područja »prirodne filozofije«, dakle u biti područja teoretske fizike.

Ali sjetimo se ukratko Boškovićeva rada uopće. Bio je on vrlo raznolik. Ležalo je to u jednu ruku u velikoj širini Boškovićeve nadarenosti, a u drugu ruku i u duhu onoga vremena, koje je iznijelo i Bernoullije i velikoga Eulera i d'Alemberta i Clairauta uz druge, sve umove mnogostranog zanimanja.

Bošković je bio i matematik i fizik i astronom i geodet i hidrolog i arhitekt i arheolog, a i elegantni latinski pjesnik. Posebnu pažnju posvećivao je osnovima nauka, napose mehanike, područje, u kome mu je vrlo prodoran njegov um otvarao daleke vidike, daleko preko horizonta njegova vremena.

U matematici privlačili su ga problemi primjena. Služeći se teorijom beskonačno malih veličina u geometrijskom obliku, rješavao je probleme zemaljske i nebeske mehanike, razvijao tada upravo aktualne teorije o akromatičkim dalekozorima, bitno pridonio razvoju teorija više geodezije, izradio sustavnu teoriju astronomskih i geodetskih instrumenata i njihovih pogrešaka, što je osnovni problem praktičnih primjena. U čistoj geometriji razvio je originalnu svoju teoriju presjeka stošca na elegantan i nov način. U društvu s Ch. Maireom izvršio je i velik posao iz više geodezije, mjerenje dva stupnja meridijana među Rimom i Riminijem, kao doprinos tada vrlo diskutiranom pitanju o obliku i veličini Zemlje. Bio je i glavni osnivač zvjezdarnice u Breri kraj Milana, koja i danas postoji i radi, u kojoj je počeo provoditi originalne svoje zamisli iz područja praktičke astronomije, ali nije ih dovršio, jer mu je bila oduzeta uprava zvjezdarnice zbog neshvaćanja veličine

njegovih ideja, ali i zbog nedovoljnih sredstava za njihovo provođenje. Ondje je htio da ostvari i znamenitu svoju zamisao, da naime određivanjem aberacije zvijezda stajačica dalekozorom napunjenim vodom i uspoređivanjem s aberacijom istih zvijezda određenom na običan način dođe do podataka o razlici brzine svjetlosti u vodi i u zraku, pitanje, koje je dobilo novo značenje postavljanjem specijalne teorije relativnosti. Izradio je i metodu za određivanje parabolne staze kometa na osnovu triju opažanja, a slično i za eliptičku stazu planeta i primijenio svoju teoriju na određivanje upravo otkrivena planeta Urana. Vrlo je vješt i temeljit bio u istraživanjima stabilnosti građevina, ispitivanju i popravljanju stanja morskih luka i uređivanju tôka bujica i rijeka, a posebnu je pažnju posvetio na želju svojih vlasti poznatom i starom problemu isušenja pontinskih močvara. Našim se vremenima sasvim približio svojim kritikama Newtonova apsolutnog prostora i apsolutnoga gibanja, a napose svojim idejama o relativnosti inercije, sve problemi, koji su došli u središte pažnje specijalnom teorijom relativnosti Einsteinovom.

Od prve svoje radnje *O Sunčevim pjegama,* izdane g. 1736., kada mu je bilo dvadeset i šest godina, do posljednjih sakupljenih u pet svezaka njegovih *Djela iz optike i astronomije,* izašlih u Bassanu g. 1785. dvije godine prije njegove smrti, izdao je velik broj rasprava iz navedenih različitih područja.*

Ali vratimo se na njegovo djelo spomenuto na početku, koje nosi onako »smion« naslov, kako i sam Bošković ističe. Polazeći od nekih Newtonovih primjedaba u njegovoj *Optici* u jednu ruku, a od »zakona neprekinutosti« pristaša filozofije G. W. Leibniza u drugu, dolazi Bošković do rezultata sasvim novih. Analizirajući pojave sudara tijela, a uvjeren, da se događanja u prirodi vrše prema zakonu neprekinutosti, t. j. da jedna veličina, kao na primjer brzina, ne prelazi iz jednog stanja u drugo skokom, nego prolazeći sva međustanja, dolazi on do zaključka, da se sva opća svojstva tvari u prirodi, kao protezanje tijelâ, njihova neproničnost, pa kohezija, kao i mnoga posebna, mogu protumačiti, uzme li se da među česticama tvari djeluje sila, koja ovisi o međusobnoj daljini čestica, a takva je, da u vrlo malim međusobnim daljinama, recimo atomskim daljinama, djeluje sila odbojna, i to s tim jače odbojnosti, što su čestice bliže, da za nešto veće daljine ta odbojna sila prelazi u privlačnu, pri čemu radi neprekinutosti u nekoj daljini sila nije ni odbojna ni privlačna, nego ima vrijednost nulu. Ali i ta privlačna sila, kada međusobna daljina čestica dalje raste, prelazi preko vrijednosti nule opet u silu odbojnu, i to se prelaženje od odbojnosti na privlačenje i obrnuto izmjenjuje nekoliko puta; a sve to u onim vrlo sitnim međusobnim atomskim daljinama. Za veće daljine dolazi konačno do izražaja privlačenje čestica prema Newtonovu zakonu, koje je obrnuto razmjerno s kvadratom daljine.

Koje zaključke izvodi Bošković iz takva vladanja silâ, koje djeluju u prirodi? Budući da odbojna sila raste tim više, što su čestice bliže, u matematičkom smislu sila teži u beskonačnost, kada međusobna daljina čestica teži nuli, izvodi Bošković, da sastavne »čestice« tvari, njeni »elementi« ne mogu biti ni ma kako male nakupine tvari, jer bi odbojna sila, koja djeluje među svake dvije čestice, raspršila svaki konačni skup njihov. One mogu dakle biti samo tvorevine bez protezanja, nedjeljive, a inače međusobno istovrsne, »neka vrst točaka«, *puncta quaedam,* kako kaže Bošković, koje se od geometrijskih točaka razlikuju jedino time, što im Bošković pripisuje svojstvo Newtonove inercije, prema kojoj, prepuštene samima sebi, one miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu, a drugo time, što su one ishodište djelovanja Boškovićeve sile, kojom djeluju na druge čestice. Svojstva tvarnih atoma dobivaju te točke, prema M. Faradayu, upravo po silama, koje iz njih djeluju.

* Pobliže o životu i radu Boškovićevu može se naći u članku o Boškoviću objavljenom u *Almanah Bošković* za god. 1950., što ga je izdalo Hrvatsko prirodoslovno društvo u Zagrebu.

Postojanje one odbojne sile u neposrednoj blizini bilo kojih dviju čestica tvari ima za posljedicu osnovno svojstvo tvari, njenu *nepronično*st, a i dalju, da su naime po dvije točke tvari uvijek udaljene za konačnu daljinu, čime se u toj teoriji tumači *protezanje tvari*. U konačnom obujmu ima uvijek samo konačan broj tih Boškovićevih točaka; taj broj određuje i *masu* tvari sadržane u obujmu.

U Boškovićevoj teoriji imaju posebno značenje one međusobne daljine dviju točaka, u kojima se sila poništava, a napose one, u kojima odbojna sila prelazi u privlačnu, a koje Bošković naziva *međama kohezije*. To su točke stabilne ravnoteže, jer dvije čestice, koje se nalaze u njima, protive se promjeni međusobne njihove daljine i vraćaju se u prvotne svoje položaje, ako su bile iz njih pomaknute. S pomoću tih međa kohezije tumači Bošković u svom sustavu fizike i koheziju tvari. Bošković se vrlo ponosio napose ovim svojim rezultatom, da se jednim jedinim tipom silâ, koje djeluju u prirodi, mogu rastumačiti osnovna svojstva tvari, za koja se do njega uvijek smatralo, da ne zavise o jednom općem zajedničkom načelu. Bošković je primijenio svoj zakon sila napose u mehanici, a dalje i u drugim granama fizike.

Boškovićeva je teorija, koja izvodi iskustvena svojstva tvari iz djelovanja silâ među »elementima« tvari, imala je dosta neprijatelja, ali i odlučnih pristaša. Još je u osamnaestom stoljeću poznati engleski kemičar i prirodoslovac Joseph Priestley prihvatio Boškovićevu teoriju kao podlogu za tumačenje kemijskih i fizičkih pojava, a John Robison, profesor fizike u Edinburghu, predavao je fiziku prema Boškovićevu sustavu. Prvak teoretske fizike u devetnaestom stoljeću, Lord Kelvin, često se vraćao na Boškovićeve misli u svojim radnjama, napose o molekularnoj dinamici. Ali posljedice, što izlaze iz Boškovićeve teorije, sežu i do naših vremena. Tako se J. J. Thomson, koji je g. 1906. postavio prvu teoriju elektrona, služio Boškovićevom krivuljom, koja grafičkim načinom predočuje njegov zakon silâ. A i danas, neke funkcije u nuklearnoj fizici pokazuju srodnosti s Boškovićevim zakonom, a ističu se i drugi momenti, koji govore za aktualnost Boškovićevih zamisli.

To se očitovalo i na Internacionalnom simpoziju o Boškoviću, koji se održao u rodnom njegovu gradu Dubrovniku od 23. do 26. oktobra prošle godine (1958.). Na njemu su sudjelovali strani i domaći stručnjaci, koji se bave izučavanjem Boškovićevih radova. Tom je zgodom Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti u Zagrebu svečano otvorila i *Spomen-muzej Ruđera Boškovića*, što ga je organizirala na otoku Lokrumu u okviru prirodoznanstvenih ustanova Dubrovnika i Akademije, a u kome je izložen život i rad Boškovićev, oživljen u okviru ljudi i ustanova njegova vremena.

Геометриска метода решавања задатака о екстремним вредностима функција

Ј. и Б. ЂЕРАСИМОВИЋ, Београд

1. За решавање проблема максимума и минимума функција постоји у диференцијалном рачуну општа метода, али се поједини проблеми могу решавати разноврсним елементарним методама.

Вероватно је нашим читаоцима најмање познато да се поједини проблеми такве врсте могу решавати и чисто геометриским путем. Метода се састоји у томе да се помоћу познатих геометриских теорема изведе низ закључака о рашћењу и опадању посматране величине и да се најзад закључи кад она постиже своју највећу или своју најмању вредност.

За такво закључивање користимо, например, теореме:

1) Дуж која спаја две тачке краћа је од сваке изломљене линије која спаја те исте тачке.

2) Нормална дуж спуштена из тачке на неку праву краћа је од сваке косе дужи повучене из исте тачке до праве.

3) Површине троуглова једнаких основица односе се као одговарајуће висине.

4) Тетива круга расте кад њено растојање од центра опада и обрнуто. Пречник је највећа тетива.

5) Тетива круга је краћа од сваке друге тетиве истог круга која је полови.

6) Ако се из тачака кружног лука који лежи са једне стране тетиве спусте нормале на тетиву, онда дужина нормале расте кад се њено подножје приближава средини тетиве.

7) Ако два равнокрака троугла имају једнаке основице онда у троуглу веће висине лежи наспрам основице мањи угао и обрнуто.

8) За све тетиве круга повучене кроз исту тачку производи отсечака су једнаки.

9) Ако се кроз неку тачку ван круга повуче ма која сечица круга, производ њених отсечака има сталну вредност једнаку квадрату тангентне дужи повучене из те тачке на круг.

2. Једноставан пример примене геометриске методе на решавање посматране врсте задатака претставља решење задатка:

Дата је једна страна троугла и њој супротан угао. Одредити троугао тако да његова површина буде што већа.

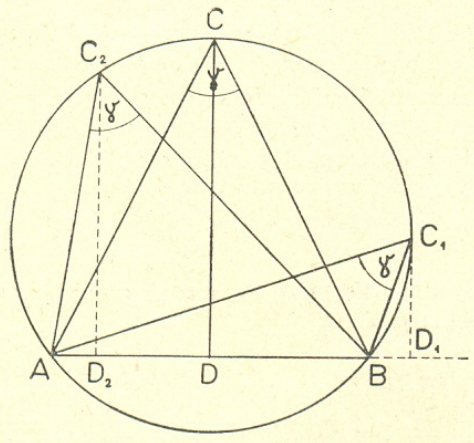
Треће теме свих троуглова који имају заједничку основицу AB и наспрам ње исти угао γ, лежи на кружном луку BCA (сл. 1). То су например троугли ABC, ABC_1, $ABC_2, \ldots$ Површине ових троуглова односе се, на основу теореме *3*, као њихове висине CD, C_1D_1, $C_2D_2, \ldots$ Према теореми *6* је:

$$C_1D_1 < C_2D_2 < \ldots < CD,$$

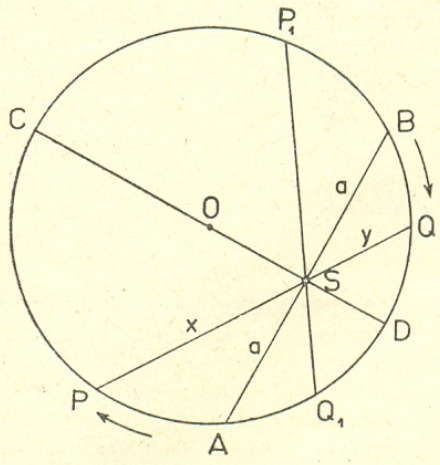
па следује закључак *да од свих посматраних троуглова највећу површину има равнокраки троугао ABC.*

3. Да бисмо рељефније приказали посматрану геометриску методу решићемо још два задатка.

1 задатак: Познат је производ два позитивна броја: a^2. Одредити бројеве тако да њихов збир има најмању могућу вредност.



Сл. 1



Сл. 2

Означимо непознате бројеве са x и y, па се у наведеном задатку тражи минимум збира

$$s = x + y$$

ако је $xy = a^2 = \text{const}$. Или, што је исто, тражи се минимум функције

$$s = x + \frac{a^2}{x}.$$

Изаберимо јединичну дуж па нека су a, x и y мерни бројеви тријух дужи. Нацртајмо тада круг са центром у O (сл. 2), а чији је полупречник r већи од дужи a ($r > a$).

Повуцимо затим тетиву $AB = 2a$ и њену централну раздаљину OS, па је $AS = SB = a$, Најзад кроз S повуцимо ма коју другу тетиву PQ. Тада је према теореми *8*: $PS \cdot SQ = a^2$. те можемо сматрати да је:

$$PS = x, \quad SQ = y.$$

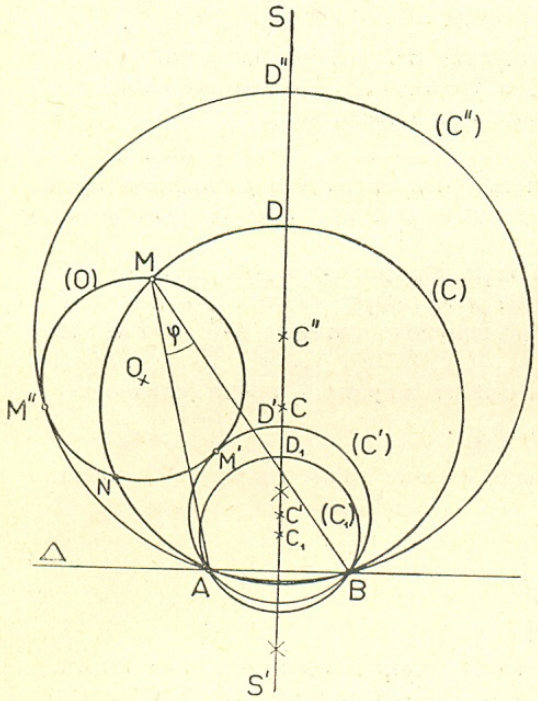
Према томе тражени збир s претстављен је тетивом PQ:

$$PQ = PS + SQ = x + y = s$$

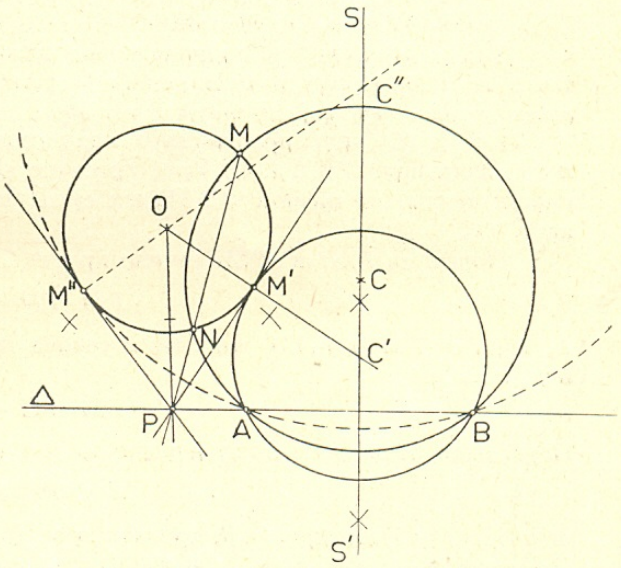
Према теореми *5* је:

$$PQ > AB.$$

Замислимо сад да се тетива PQ поклапа са AB и да се затим окреће око тачке S у смислу супротном кретању казаљке на сату. Тада дужина тетиве $PQ = s$ расте до положаја CD, а затим опет опада до положаја BA. Тако закључујемо да тражени збир $s = x + y$ *постиже минимум* $s = 2a$ за $x = y = a$, тј. кад се тетива PQ поклапа са тетивом AB. Из посматрања промене тетиве PQ следује да збир s постиже и максимум $s = CD = 2r$. Али тај максимум уствари не постоји јер, при изабраној дужи, пречник $2r$ може бити ма колико велики, што значи да и збир s може имати ма колико велику вредност.



Сл. 3



Сл. 4

2 задатак: На датом кругу наћи тачку из које се дата дуж види под највећим могућим углом.

Нека је O центар датог круга (O), R његов полупречник, а права $\triangle$ на којој лежи дата дуж AB нека је изван круга (O). Из произвољне тачке M круга (O) дуж AB види се под углом $AMB = \varphi$ (сл. 3). Кад се тачка M креће по кругу (O) угао φ се мења, али је увек $0 < \varphi < 180^0$. Значи да у току тих промена угао φ достиже неку своју највећу и неку своју најмању вредност за које вреди неједнакост

$$0 < \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2 < 180^0$$

Кроз тачке A, B и M конструишимо круг (C). Његов центар C лежи на симетрали SS' дужи AB, а угао φ је у њему периферијски угао над тетивом AB.

Нека се сад центар C круга (C) креће по симетрали SS' ка S', али тако да круг (C) увек пролази кроз тачке A и B. При томе се, разуме се, мења и његов полупречник. Пресечне тачке M и N крећу се тада по кругу (O) једна другој у сусрет да се најзад, кад C дође у C', поклопе у положају M'. Тада се кругови (O) и (C) додирују. Ако се C креће и даље у истом смеру и дође например у положај C_1 кругови (O) и (C_1)

немају заједничких тачака, јер се све тачке лука BD_1A круга (C_1) налазе у унутрашњости круга (C'). (Са D је означена једна пресечна тачка круга (C) и праве SS'). Ако се центар креће ка S, онда пресечне тачке M и N иду опет једна другој у сусрет (само сад у смеровима супротним ранијим) да би се, кад C дође у положај C'', поклопиле у положај M''. И круг (C'') се додирује са кругом (O), само је сад круг (O) у унутрашњости круга (C''). Даљим кретањем центра C ка S додирују се кругови који више немају заједничких тачака са кругом (O).

На основу теореме 7, периферијски угао над тетивом AB у круговима (C) (угао φ) опада кад се центар C креће од C' ка C'', јер је

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle ADB$$

(Краци овог последњег угла нису нацртани).

Према томе је

$$\sphericalangle AM''B < \sphericalangle AMB < \sphericalangle AM'B,$$

где је M ма која тачка круга (O) различита од M' и M''.

Остаје нам још да, кад је дат круг (O) и дата дуж AB, нађемо тачке M' и M'', као и одговарајуће вредности угла φ, максималну и минималну. То можемо извршити на два начина: геометриском конструкцијом и аналитичком методом.

а) *Геометриска конструкција.*

Тачке M' и M'' су додирне тачке датог круга (O) и кругова који пролазе кроз тачке A и B. Према томе потребно је уствари решити задатак: *Кроз две дате тачке конструисати круг који додирује дати круг.*

Нека је (C) круг произвољног полупречника који пролази кроз дате тачке A и B и сече дати круг (O) (сл. 4). Кроз пресечне тачке M и N повуче се тетива и нека је P пресек тетиве са правом Δ. Најзад су из тачке P повучене тангенте PM' и PM'' на круг (O).

Пошто су PAB и PNM сечице круга (C), на основу теореме 9, вреди једнакост

$$PM \cdot PN = PB \cdot PA$$

А, како су PM' и PNM тангента и сечица повучене из исте тачке на круг (O) вреди и једнакост

$$PM \cdot PN = \overline{PM'}^2$$

Поређењем последњих двеју једнакости добија се

$$PA \cdot PB = \overline{PM'}^2$$

што значи да један круг који пролази кроз тачке A и B додирује праву PM у тачки M'. Тај круг се, према томе, у истој тачки додирује и са кругом (O). Центар C' новог круга налази се у пресеку правих OM' и SS'. (Зашто?) На исти начин се доказује додирна тачка круга (O) и другога круга који пролази кроз A и B.

б) *Решење аналитичком методом.* - За осе координатног система могу се, например, узети праве Δ и SS'. Тачке A и B имају тада координате $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, ако је $AB = 2a$, а једначина круга (O) је:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2 \text{ уз услов } |q| > R.$$

Саветујемо читаоцу да реши — тј. одреди кругове (C') и (C'') који пролазе кроз тачке A и B и додирују дати круг (O) — само у посебном случају:

$$A(-1,0), \quad B(1,0), \quad (x+6)^2 + (y-5)^2 = 20$$

$$\left[\text{Резултати: } C'(0,2), \quad C''(0,38), \quad M'(-2,3), \quad M''\left(-6\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right].$$

Нека читалац реши сам *задатак 3: На датој правој наћи тачку из које се дата дуж види под највећим могућим углом. При томе нека се дата дуж цела налази са исте стране праве.*

Посматрати у задатку 2 и случај кад круг (O) сече праву Δ, али тако да су тачке A и B обе у кругу (O) или обе изван њега.

Raman efekt

LIDIJA COLOMBO, Zagreb

Promjena stanja energije u sistemu kao što je atom ili molekula dovodi do emisije ili apsorpcije kvanta svjetlosti. Na taj način nastaju atomski odnosno molekularni spektri. Promjene energetskog stanja u atomu nastaju uslijed prelaza elektrona iz jedne staze u drugu. Obzirom da su staze kvantizirane, t. j. da se elektroni gibaju samo po diskretnim stazama, emitirani — odnosno apsorbirani spektar nije kontinuiran, nego je to niz diskretnih spektralnih linija, koje su karakteristične za atom pojedinog elementa.

Promjena energetskog stanja u molekuli nastaje na tri načina:

a) Promjenom elektronskih stanja u pojedinim atomima molekule.

b) Vibracijom atomskih jezgri, čije mase su daleko veće od masa elektrona, pa se može shvatiti, da je elektronski oblak oko pojedine atomske jezgre na miru i da titranje izvode same jezgre kao takve.

c) Rotacijom molekule kao sistema oko jedne čvrste osi.

Energije međutim, koje su potrebne za pobuđivanje ovih triju stanja, daleko se razlikuju po iznosu. Dok su elektronske energije reda veličine 1eV, vibracijone energije su reda veličine 10^{-1} eV, a rotacijone energije su reda veličine 10^{-2} eV.

U spektroskopiju je uveden običaj, da se energije izražavaju frekvencijama (po Planckovom zakonu $E = h\nu$). U spektroskopiji se upotrebljava veličina »broj valova«, koja je jednaka pravoj frekvenciji podijeljenoj sa brzinom svjetlosti

$$n = \frac{\nu}{c}$$

Dimenzija te jedinice je cm^{-1} ili 1 Kayser, kako je usvojila Međunarodna spektroskopska Unija.

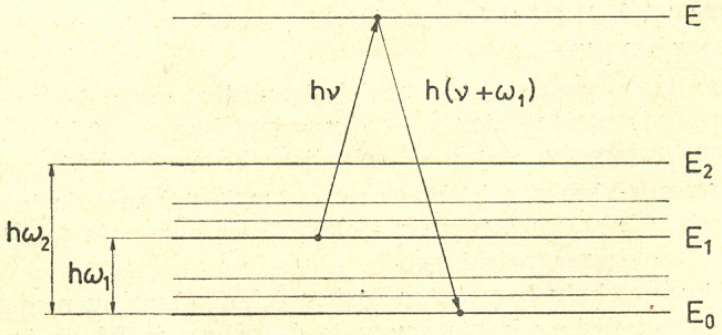
Odnos između ovih veličina i eV je slijedeći:

$$1\ cm^{-1} = 1{,}239 \cdot 10^{-4}\ eV$$

Prema tome elektronski spektri leže u području oko 8000 cm^{-1}, vibracijoni u području 200—3000 cm^{-1}, a rotacijoni do 100 cm^{-1}.

Atomski spektri se dobivaju pobuđivanjem atoma pomoću visoke temperature u električnom luku, odnosno iskri.

Molekularni spektri se mogu dobiti pobuđivanjem na emisiju također pomoću luka (pretežno elektronska stanja). Vibracijona i rotacijona stanja molekule daju nam apsorpcioni molekularni (infracrveni) spektri i Raman spektri, koji se opažaju u svjetlosti koja je raspršena na molekulama.



Sl. 1.

Početkom XX. stoljeća fizičari su mnogo ispitivali raspršenja valova svjetlosti na materiji. 1924. godine fizičar Smekal, jednostavnom primjenom Planckove teorije o kvantu svjetlosti, teorijski je predvidio postojanje ovog efekta.

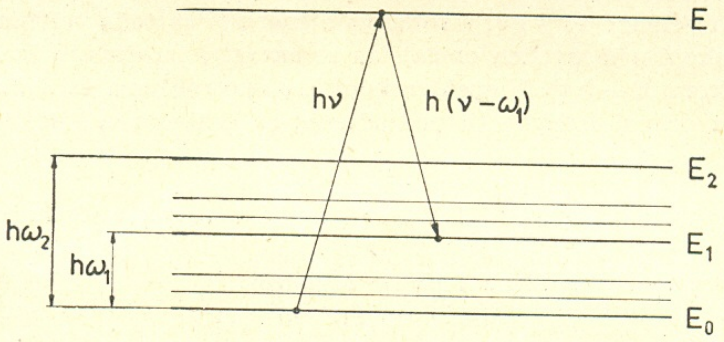
Neka E_0, E_1 ... (sl. 1) prikazuje razne energetske nivoe molekule. E je neko nestabilno stanje.

Pretpostavimo da na molekulu pada val svjetlosti bilo koje frekvencije v. Uslijed toga molekula prelazi u energetsko stanje E koje je nestabilno i uskoro se vraća u jedno od stabilnih stanja, emitirajući pritom kvant svjetlosti. Ako se molekula vrati u osnovno stanje, emitira frekvenciju, koja je jednaka upadnoj i imamo Rayleigh-evo zračenje. Međutim, ona može doći i u neko više stanje E_1. Zbog zakona o sačuvanju energije, emitirana frekvencija je:

$$\frac{E - E_1}{h} = (v - v_1) = \omega_1$$

Vidimo, da ova frekvencija odgovara jednoj od vlastitih frekvencija molekule w_1. Obzirom da se molekula mogla vratiti u bilo koje od mogućih energetskih stanja, to će se u spektru raspršene svjetlosti pojaviti niz novih linija prema nižim frekvencijama. Razlike između ovih frekvencija i upadne, daju nam vlastite frekvencije promatrane molekule.

Moguće je međutim i to, da se molekula već nalazi u nekom višem stanju (na pr. E_1). Ona prelazi u nestabilno stanje E i emisijom se vraća u stanje E_0 (sl. 2).



Sl. 2.

Emitirana frekvencija je veća od upadne, i nove linije leže na strani viših frekvencija prema upadnoj. Ovaj efekt u spektru raspršene svjetlosti manifestira se dakle u vidu niza novih spektralnih linija koje su raspoređene simetrično prema uzbudnoj frekvenciji.

Eksperimentalnu potvrdu ove postavke dao je 28. veljače 1928. indijski fizičar Sir C. V. Raman, po kojemu je efekt dobio ime. On je prva opažanja vršio na molekuli benzola (C_6H_6). Istodobno su taj efekt na kristalu opazili Rusi: Landsberg i Mandelstam.

Energetska stanja između kojih molekula prelazi mogu biti:
a) dva razna vibracijona stanja — vibracijoni Raman efekt,
b) dva razna rotacijona stanja — rotacijoni Raman efekt.

Teoriju Raman efekta dao je Placzek. On je pokazao da intenzitet pojedine Raman linije ovisi isključivo o promjeni električnog momenta molekule,* kojega je inducirao upadni elektromagnetski val.

Promatrajmo molekulu kao sistem čestica (atomi) koje su međusobno povezane elastičnim silama (kemijske veze). Poznato je da mnoge molekule imaju stalni električni moment što je uvjetovano raspodjelom ukupnog negativnog naboja (elektroni) i pozitivnog naboja (atomske jezgre) u molekuli. Ako se molekula nalazi u vanjskom električnom polju, inducira se međutim poseban električni moment. Promjena indu-

* Električni moment je produkt električnih naboja i razmaka tih naboja.

možemo dati izborna pravila: U Raman efektu javlja se ona frekvencija kod koje dolazi do promjene induciranog električnog momenta, dok se u infracrvenom spektru javlja samo ona frekvencija kod koje se mijenja električni moment molekule.

Inducirani električni moment molekule dan je relacijom

$$\vec{M} = \alpha \vec{E} \qquad 1)$$

Faktor α označuje nam sposobnost molekule da se u električnom polju polarizira (polarizabilitet molekule). Ova veličina dana je relacijom

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' Q_0, \qquad 2)$$

gdje je

$$Q = Q_0 \cos 2\pi\omega t \qquad 3)$$

koordinata atoma u molekuli (jer atom u molekuli titra harmonički oko položaja ravnoteže čija je koordinata Q_0).

Upadno svijetlo stvara promjenljivo električno polje, čiji intenzitet harmonički titra, pa je to polje dano izrazom:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \qquad 4)$$

Ako uvrstimo u jednadžbu (1) relacije (2), (3) i (4) dobijemo:

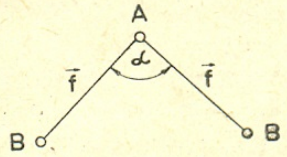
$$\vec{M} = \alpha_0 \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t + \alpha' Q_0 \cos 2\pi\omega t \cdot \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \qquad 5)$$

Primijenimo li pravilo za produkt cosinusa dobijemo izraz

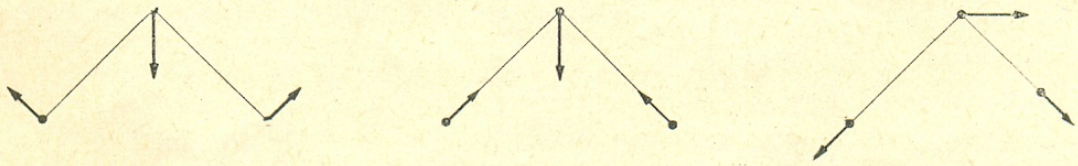
$$\vec{M} = \alpha_0 \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t + \frac{1}{2} \alpha' Q_0 \vec{E}_0 [(\cos 2\pi(\nu + \omega) t + \cos 2\pi(\nu - \omega) t]. \qquad 6)$$

Vidimo da je rezultat međudjelovanja svjetlosti i molekule zračenje, koje sa sobom nosi nepromijenjenu frekvenciju ν (prvi član) i još dvije druge frekvencije od kojih je jedna uvećana $(\nu + w)$, a druga umanjena $(\nu - w)$ za vlastitu frekvenciju molekule w.

Molekulu možemo predočiti kao mehanički model. Uzmimo tro-atomnu molekulu tipa kao na sl. 3. Sile između atoma A i B su elastične. Takva molekula može prema tome izvoditi razna titranja. Ako eliminiramo translaciju molekule kao sistema i rotaciju oko osi, sistem izvodi titraje kao na sl. 4. Općenito, ako imamo molekulu od N-atoma, obzirom da svaki atom ima tri stepena slobode, ukupni broj titranja je 3 N. Međutim 3 titraja otpadaju na translaciju, a 3 na rotaciju molekule kao čvrstog sistema, pa vrijedi, da sistem od N čestica ima $3N - 6$ različitih mogućnosti titranja.



Sl. 3.

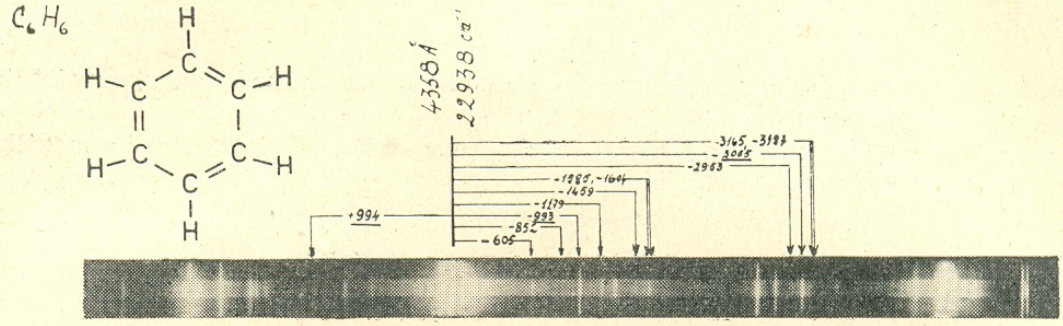

Sl. 4.

Svi ovi oblici titranja ne moraju biti aktivni u Raman spektru — odnosno u infracrvenom, ali se u većini slučajeva sa ove dvije metode mogu svi takvi titraji identificirati. Nekada dva ili više različitih titraja imaju istu frekvenciju i onda kažemo da je titraj dvostruko ili višestruko degeneriran.

Obzirom na to, da su veze među atomima elastične, predstavlja molekula sistem od N-harmoničkih oscilatora. Takvi sistemi mogu biti matematski tretirani na osno-

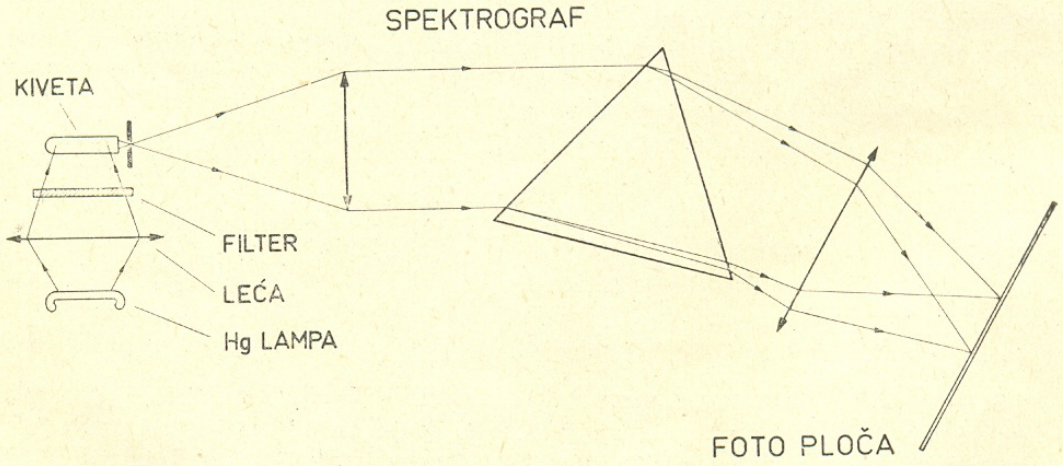
vima kvantne mehanike, pa je teorijski moguće proračunati frekvencije takvog sistema, ako su nam poznate sile vezanja $\vec{f}$, mase atoma i kutovi među vezama. Račun međutim postaje već za šestero-atomnu mlekulu vrlo kompliciran.

Identificiranje Raman-spektra je znatno pojednostavljeno zbog pojave karakterističnih frekvencija. Može se pokazati, da je međudjelovanje pojedinih veza unutar molekule zanemarivo, pa frekvencija, koja pripada nekoj danoj vezi (na primjer C — C, C = C, C = O, C — H), ima uvijek približno istu vrijednost. Na taj način je moguće odrediti strukturu molekule rastavljajući je na funkcionalne grupe i tražeći pripadne frekvencije. Na primjer spektri svih molekula koje sadrže aromatski



Sl. 5.

prsten (kao na primjer benzol, gledaj sl. 5.) imaju intenzivnu liniju frekvencije oko 990 cm^{-1}, a molekule koje sadrže C — H veze imaju titraje frekvencije 3060 cm^{-1}. Na slici 5. je kopija spektrograma dobivenog od svjetlosti raspršene na benzolovim molekulama. Brojevi označuju razlike između dobivene frekvencije i uzbudne (u ovm slučaju 22938 cm^{-1}) i odgovaraju vlastitim frekvencijama benzolove molekule. Intenzivna linija 993 cm^{-1} (koja pripada titraju aromatskog prstena) pojavljuje se i u smjeru povećanih i smanjenih frekvencija. Linija 3065 cm^{-1} (koja pripada titranju C — H veze) vidi se jasno na strani smanjenih frekvencija, ali je izostala na strani povećanih frekvencija, jer je vjerojatnost njezinog nastajanja daleko manja. Ostale linije, svaka posebno, pripadaju jednom od ostalih mogućih načina titranja benzolove molekule.



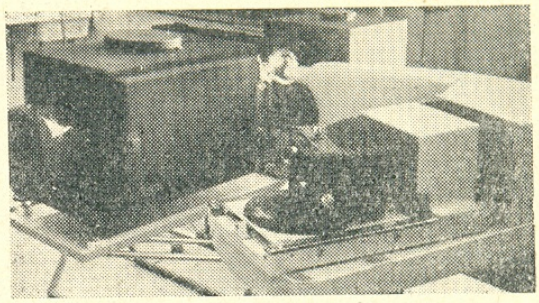
Sl. 6.

Ispituje se svjetlost, koja je raspršena pod kutem od 90° prema upadnom snopu (sl. 6.). To se radi samo zato jer je u tom smjeru Rayleigh-ovo raspršenje

najslabije. Kao izvor upotrebljava se skoro uvijek živina lampa, jer taj spektar ima nekoliko intenzivnih ljubičastih i plavih linija, a osim toga, prostor u kojem se javlja Raman efekt nije prekriven živinim linijama.

Monokromatizacija snopa vrši se tako, da se upotrebi pred kivetom optički filter. To može biti prikladna otopina (na pr. jod otopljen u CCl_4) ili stakleni filtri.

Kiveta je stakleni cilinder sa planparalelnim izlaznim prozorom. Spektografi, koji se upotrebljavaju u Raman spektroskopiji, poželjno je da imaju veliku svjetlosnu moć. Spektri se snimaju na fotografsku ploču, a zatim se pomoću krivulje baždarenja određuju frekvencije pojedinih linija. Razlike između upadne frekvencije (već nama poznate) i pojedine Ramanske, daje nam pripadnu vlastitu frekvenciju molekule.



Sl. 7.

Raman spektroskopija je jedan od načina koji se upotrebljavaju za određivanje strukture materije. Uz infracrvenu spektrografiju ona je jedna od najčešćih metoda, kojom kemičar kontrolira dobivene spojeve, a fizičar određuje neposredno sile vezanja među atomima. Zbog toga su ove dvije metode našle veliku primjenu u modernoj industriji.

Sl. 7. prikazuje aparaturu za snimanje Raman spektra u Institutu »Ruđer Bošković«

Deljivost brojeva

DRAGIŠA A. STEVANOVIĆ, Zrenjanin

1. **Definicija.** Ako je a ma koji ceo broj a b ma koji prirodan broj, onda uvek postoje dva cela broja q i r koji zadovoljavaju jednakost

$$a = bq + r \qquad (r < b). \tag{1}$$

U slučaju kad je $r = 0$, tj. kad je

$$a = bq \tag{2}$$

kaže se da je broj a deljiv brojem b.

Broj a deljiv je brojem b ako je a proizvod broja b i jednog celog broja q, ili ako se deljenje broja a brojem b svršava bez ostatka.

U tom slučaju broj a je *sadržalac* broja b, a b je *delilac* ili *činilac* broja a.

Za označavanje deljivosti upotrebljavaćemo znak „ $\vdots$ “, tj. tri tačke koje leže na jednoj vertikalnoj liniji.

2. **Deljivost zbira i razlike.** Stav 1. *Ako je svaki sabirak zbira deljiv nekim brojem, onda je i zbir deljiv tim brojem.*

Neka je $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s$ i $a_1 \vdots k$, $a_2 \vdots k$, $a_3 \vdots k, \ldots, a_n \vdots k$.

Tada je $s \vdots k$.

Dokaz. Pošto je po pretpostavci

$$a_1 = kq_1, \quad a_2 = kq_2, \quad a_3 = kq_3 \ldots\ldots a_n = kq_n,$$

to se na osnovu osobine uniformnosti zbira dobija

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = k\,(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots. + q_n),$$

odakle je, smenom leve strane vrednošću s,

$$s = k\,(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n). \tag{3}$$

Jednakost (3) pokazuje da je $s \vdots k$ i da je količnik zbira jednak zbiru količnika sabiraka.

Napomena. Obrnuta teorema nije uvek tačna, tj. : ako je zbir više sabiraka deljiv nekim brojem, ne mora i svaki sabirak da bude deljiv tim brojem.

Stav 2. Ako su umanjenik i umanjilac deljivi nekim brojem, onda je i njihova razlika deljiva tim brojem.

Neka je $a - b = c$ i $a \vdots k$, $b \vdots k$. Tada je $c \vdots k$.

Dokaz. Pošto je po pretpostavci

$$a = kq_1, \quad b = kq_2,$$

to je

$$a - b = k(q_1 - q_2)$$

ili

$$c = k(q_1 - q_2). \tag{4}$$

Jednakost (4) pokazuje da je $c \vdots k$ i da je količnik razlike jednak razlici količnika umanjenika i umanjioca.

Napomena. Pošto je umanjenik jednak zbiru umanjioca i razlike, to stav 2 možemo formulisati i ovako:

Ako je zbir dva sabirka i jedan od njih deljiv nekim brojem, onda je i drugi sabirak deljiv tim brojem.

3. **Kriterijum deljivosti brojeva.** Kriterijumom deljivosti broja a brojem b naziva se potreban i dovoljan uslov, koji mora postojati da bi broj a bio deljiv brojem b.

a) Specijalni slučajevi deljivosti brojeva.

1. *Kriterijum deljivosti brojeva sa 2 i 5.* Neka je dat broj

$$a = c_p \cdot 10^p + c_{p-1} \cdot 10^{p-1} + c_{p-2} \cdot 10^{p-2} + \ldots + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0. \tag{5}$$

On se može napisati u obliku zbira dva sabirka:

$$a = (c_p \cdot 10^p + c_{p-1} \cdot 10^{p-1} + c_{p-2} \cdot 10^{p-2} + \ldots + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10) + c_0.$$

Prvi sabirak je deljiv sa 2 i 5 (stav 1.). Da bi broj a bio deljiv sa 2 ili sa 5, potrebno je i dovoljno, da njegov drugi sabirak c_0 bude deljiv sa 2 ili sa 5.

Broj je deljiv sa 2 ili sa 5 ako je njegova cifra jedinica deljiva sa 2 ili sa 5.

2. *Kriterijum deljivosti brojeva sa 4 i 25.* Broj a iz (5) pretstavimo u obliku zbira dva sabirka:

$$a = (c_p \cdot 10^p + c_{p-1} \cdot 10^{p-1} + c_{p-2} \cdot 10^{p-2} + \ldots + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2) + (c_1 \cdot 10 + c_0).$$

Prvi sabirak je deljiv sa 4 i 25 (stav 1.). Da bi broj a bio deljiv sa 4 ili sa 25, potrebno je i dovoljno, da i drugi sabirak $(c_1 \cdot 10 + c_0)$ bude deljiv sa 4 ili sa 25.

Broj je deljiv sa 4 ili sa 25 ako je broj koji čine dve poslednje njegove cifre deljiv sa 4 ili sa 25.

3. *Kriterijum deljivosti brojeva sa 8 i 125.* Broj a iz (5) pretstavimo sad u obliku zbira dva sabirka ovako:

$$a = (c_p \cdot 10^p + c_{p-1} \cdot 10^{p-1} + c_{p-2} \cdot 10^{p-2} + \ldots + c_3 \cdot 10^3) + (c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0).$$

Prvi sabirak je deljiv sa 8 i 125 (stav 1.). Da bi broj a bio deljiv sa 8 ili sa 125, potrebno je i dovoljno, da i drugi sabirak $(c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0)$ bude deljiv sa 8 ili sa 125.

Broj je deljiv sa 8 ili sa 125 ako je broj koji čine tri poslednje njegove cifre deljiv sa 8 ili sa 125.

4. *Kriterijum deljivosti brojeva sa 3 i 9.* Stepene dekadne jedinice broja a iz (5) možemo izraziti u obliku:

$$10^p = 9 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{p \text{ cifara}} + 1 = 9\alpha_p + 1, \text{ gdje je } \alpha_p = \overbrace{111\ldots1}^{p \text{ cifara}},$$

$$10^{p-1} = 9 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{p-1 \text{ cifara}} + 1 = 9\alpha_{p-1} + 1, \text{ gdje je } \alpha_{p-1} = \overbrace{111\ldots1}^{p-1 \text{ cifara}},$$

$$10^{p-2} = 9 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{p-2 \text{ cifara}} + 1 = 9\alpha_{p-2} + 1, \text{ gdje je } \alpha_{p-2} = \overbrace{111\ldots1}^{p-2 \text{ cifara}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$10^3 = 9 \cdot 111 + 1 = 9\alpha_3 + 1, \text{ gdje je } \alpha_3 = 111,$$

$$10^2 = 9 \cdot 11 + 1 = 9\alpha_2 + 1, \text{ gdje je } \alpha_2 = 11,$$

$$10 = 9 \cdot 1 + 1 = 9\alpha_1 + 1, \text{ gdje je } \alpha_1 = 1.$$

Tada je

$$a = c_p(9\alpha_p + 1) + c_{p-1}(9\alpha_{p-1} + 1) + c_{p-2}(9\alpha_{p-2} + 1) + \ldots + c_3(9\alpha_3 + 1) + c_2(9\alpha_2 + 1) + c_1(9\alpha_1 + 1) + c_0,$$

ili $$a = 9(c_p\alpha_p + c_{p-1}\alpha_{p-1} + \ldots + c_3\alpha_3 + c_2\alpha_2 + c_1\alpha_1) + (c_p + c_{p-1} + c_{p-2} + \ldots + c_3 + c_2 + c_1 + c_0).$$

Prema tome, broj a izrazili smo u obliku zbira dva sabirka. Prvi sabirak je deljiv sa 3 i 9 (stav 1.). Da bi broj a bio deljiv sa 3 ili sa 9, potrebno je i dovoljno, da i drugi sabirak $(c_p + c_{p-1} + c_{p-2} + \ldots + c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ bude deljiv sa 3 ili sa 9.

Broj je deljiv sa 3 ili sa 9 ako je zbir njegovih cifara deljiv 3 ili sa 9.

5. *Kriterijum deljivosti brojeva sa 7, 11 i 13.* Broj a iz (5) može pretstaviti ovako:

$$a = 10^3(c_p \cdot 10^{p-3} + c_{p-1} \cdot 10^{p-4} + c_{p-2} \cdot 10^{p-5} + \ldots + c_3) + (c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0),$$

ili $$a = 1000\,m + n, \tag{6}$$

gdje je $m = c_p \cdot 10^{p-3} + c_{p-1} \cdot 10^{p-4} + c_{p-2} \cdot 10^{p-5} + \ldots + c_3$, tj. m je broj koji se piše pomoću prvih $p-2$ cifara broja a, a $n = c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$, tj. n je broj koji čine tri poslednje cifre broja a.

Ako se desnoj strani jednakosti (6) doda m i oduzme m, dobija se

$$a = 1001\,m + (n - m).$$

Pošto je $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, poslednju jednakost možemo napisati u obliku

$$a = 7 \cdot 11 \cdot 13\,m + (n - m), \text{ ili } a = 7 \cdot 11 \cdot 13\,m - (m - n).$$

Da bi broj a bio deljiv sa 7, ili sa 11, ili sa 13, potrebno je i dovoljno, da razlika $n - m$, ako je $n > m$, ili $m - n$, ako je $m > n$, bude deljiva sa 7, ili sa 11, ili sa 13.

Primer. Ispitati da li je broj $a = 397254$ deljiv sa 7, ili sa 11, ili sa 13. Ovdje je $m = 397$, $n = 254$, pa je $m - n = 143$, a $143 \vdots (11 \text{ i } 13)$, Stoga je i broj 397254 deljiv sa 11 i 13.

Napomena. Ako je razlika $m - n$, odnosno $n - m$, veliki broj, tada se na nju primenjuje isti postupak. Tako, naprimer, ispitajmo da li je broj 4 789 464 498 deljiv sa 7, 11 i 13.

1^0	2^0	3^0
$m = 4\ 789\ 464$	$m_1 = 4\ 788$	$n_2 = 822$
$n = 498$	$n_1 = 966$	
$m - n = 4\ 788\ 966$	$m_1 - n_1 = 3\ 822$	$n_2 - m_2 = 819.$

Broj $819 \vdots (7 \text{ i } 13)$, pa je i broj $4\ 789\ 464\ 498 \vdots (7 \text{ i } 13)$.

b) Opšta teorema deljivosti brojeva.

Neka su dati brojevi a i b i neka je $a > b$.

Stav 3. *Broj a deljiv je brojem b, ako je zbir proizvoda cifara broja a sa ostacima koji se dobijaju deljenjem stepena dekadne jedinice brojem b, deljiv brojem b.*

Dokaz. Neka je

$$a = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + c_3 \cdot 10^3 + \ldots + c_{p-2} \cdot 10^{p-2} + c_{p-1} \cdot 10^{p-1} + c_p \cdot 10^p \tag{7}$$

i neka su: $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_p$, ostaci, koji se dobijaju deljenjem stepena $10^1, 10^2, 10^3, \ldots, 10^p$ brojem b.

Ako je $(c_0 + c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + \ldots + c_{p-2}r_{p-2} + c_{p-1}r_{p-1} + c_pr_p) \vdots b$, onda je i $a \vdots b$.

Uvedimo sledeću tablicu oznaka:

Deljenik	Delilac	Količnik	Ostatak	Vrednost deljenika
$10^0 = 1$	b	q_0	$r_0 = 1$	$1 = bq_0 + r_0$
10^1	b	q_1	r_1	$10^1 = bq_1 + r_1$
10^2	b	q_2	r_2	$10^2 = bq_2 + r_2$
10^3	b	q_3	r_3	$10^3 = bq_3 + r_3$
. . . . .				
10^{p-2}	b	q_{p-2}	r_{p-2}	$10^{p-2} = bq_{p-2} + r_{p-2}$
10^{p-1}	b	q_{p-1}	r_{p-1}	$10^{p-1} = bq_{p-1} + r_{p-1}$
10^p	b	q_p	r_p	$10^p = bq_p + r_p$

Ako u (7) zamenimo stepene dekadne jedinice odgovarajućim vrednostima iz tablica, dobićemo:

$$a = c_0 + c_1(bq_1 + r_1) + c_2(bq_2 + r_2) + c_3(bq_3 + r_3) + \ldots + c_{p-2}(bq_{p-2} + r_{p-2}) + c_{p-1}(bq_{p-1} + r_{p-1}) + c_p(bq_p + r_p),$$

ili

$$a = (c_1bq_1 + c_2bq_2 + c_3bq_3 + \ldots + c_{p-2}bq_{p-2} + c_{p-1}bq_{p-1} + c_pbq_p) + (c_0 + c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + \ldots + c_{p-2}r_{p-2} + c_{p-1}r_{p-1} + c_pr_p).$$

Dakle, broj a izrazili smo u obliku zbira dva sabirka. Prvi sabirak je uvek deljiv sa b (stav 1.). Da bi broj a bio deljiv brojem b, potrebno je i dovoljno, da i drugi sabirak $(c_0 + c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + \ldots + c_{p-2}r_{p-2} + c_{p-1}r_{p-1} + c_pr_p)$ bude deljiv brojem b, što je trebalo i dokazati.

Primer. Ispitati da li je broj 5681 deljiv brojem 23. Sastavimo tablicu ostataka:

$$10^0 = 23 \cdot 0 + 1, \quad 10^1 = 23 \cdot 0 + 10, \quad 10^2 = 23 \cdot 4 + 8, \quad 10^3 = 23 \cdot 43 + 11.$$

Zbir proizvoda cifara datog broja sa odgovarajućim ostacima je

$$1 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 11 = 184.$$

Broj $184 \vdots 23$, pa je i broj $5681 \vdots 23$.

c) Primena opšte teoreme deljivosti brojeva.

Primenom opšte teoreme deljivosti brojeva odredićemo uslove deljivosti samo nekih brojeva ranije navedenih.

1. *Deljivost brojeva sa 2 i 5.* Deljenjem stepena dekadne jedinice sa 2, odnosno 5, dobijamo ostatke $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_p = 0$. Tada opšti uslov deljivosti brojeva postaje

$$c_0 + c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + \ldots + c_{p-2}r_{p-2} + c_{p-1}r_{p-1} + c_pr_p = c_0.$$

Prema tome, dolazimo do istog uslova, koji smo imali u odeljku a (1).

2. *Deljivost brojeva sa 4 i 25.* Deljenjem stepena dekadne jedinice sa 4 dobijamo ostatke $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_p = 0$. Opšti uslov deljivosti brojeva u ovom slučaju postaje

$$c_0 + c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + \ldots + c_{p-2}r_{p-2} + c_{p-1}r_{p-1} + c_pr_p = c_0 + 2c_1.$$

Broj je deljiv brojem 4, ako je zbir njegove cifre jedinica i dvostruke cifre desetica, deljiv brojem 4.

Ovaj uslov deljivosti brojeva brojem 4 je nešto jednostavniji nego uslov u odeljku a (2).

Deljenjem stepena dekadne jedinice brojem 25 dobijamo ostatke: $r_1 = 10$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_p = 0$. U ovom slučaju opšti uslov deljivosti brojeva svodi se na $(c_0 + 10 \cdot c_1)$.

Broj je deljiv brojem 25, ako je zbir njegove cifre jedinica i desetostruke cifre desetica, deljiv brojem 25.

3. *Deljivost brojeva sa 8 i 125.* Deljenjem stepena dekadne jedinice brojem 8, dobijamo ostatke: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = r_4 = \ldots = r_p = 0$. Tada se opšti uslov deljivosti brojeva svodi na: $(c_0 + 2 \cdot c_1 + 4c_2)$.

Broj je deljiv brojem 8, ako je zbir njegove cifre jedinica, dvostruke cifre desetica i četvorostruke cifre stotina, deljiv brojem 8.

Deljenjem dekadne jedinice brojem 125, dobijamo ostatke: $r_1 = 10$, $r_2 = 100$, $r_3 = r_4 = \ldots = r_p = 0$. U tom slučaju opšti uslov deljivosti brojeva se svodi na: $(c_0 + 10 \cdot c_1 + 10^2 \cdot c_2)$, tj. dobija se isti uslov koji smo imali u odeljku a (3).

4. *Deljivost brojeva sa 3 i 9.* Deljenjem stepena dekadne jedinice brojevima 3 i 9 dobijamo ostatke: $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_p = 1$. Stoga se opšti uslov deljivosti brojeva svodi na: $(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{p-2} + c_{p-1} + c_p)$, tj. odbija se isti uslov iz a (4).

Primenjujući ovaj uslov deljivosti brojeva i na druge brojeve možemo dobiti vrlo interesantne uslove deljivosti.

O jednoj univerzalnoj formuli za volumene tijela

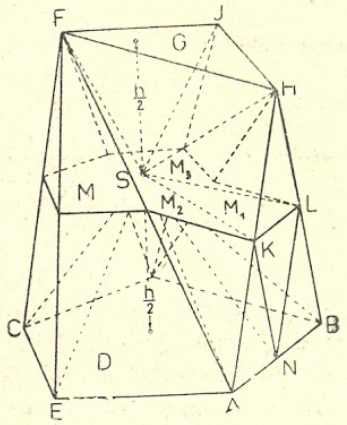
MILENKO SEVDIĆ, Zagreb

(Svršetak)

Sada možemo konačno prijeći na izvođenje te glasovite formule i pokazati kako se ona dobiva kao formula za izračunavanje t. zv. *prizmatoida*. Pri samom izvođenju poslužit ćemo se formulom za volumen piramide, jer će se prizmatoid rastaviti u same piramide.

Kako je manje poznato, što se razumijeva pod prizmatoidom, ponajprije ćemo definirati to tijelo. (Sl. 8.).

Među poliedrima prizmatoid je definiran kao tijelo, koje je gore i dolje omeđeno s dva proizvoljna poligona, koji leže u paralelnim ravninama, ali kojima se broj vrhova ne mora podudarati. Tijelo za pobočne plohe ima samo trokute, kojima j baza uvijek stranica jednog poligona, a vrh mu je jedan vrh drugog poligona. Ako je prizmatoid omeđen dolje s jednim n-terokutom, a gore s jednim m-terokutom, tada će biti n pobočnih trokuta s vrhom prema gore, a m drugih trokuta s vrhom prema dolje. U izuzetnim slučajevima mogu dva susjedna bočna trokuta, od kojih jedan ima za stranicu brid donje baze, a drugi opet brid gornje baze, pasti u jednu ravninu, tako da se kao pobočna ploha pojavljuje četverokut.

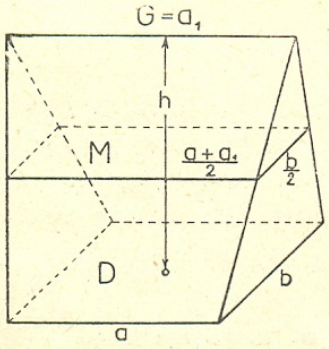


Sl. 8.

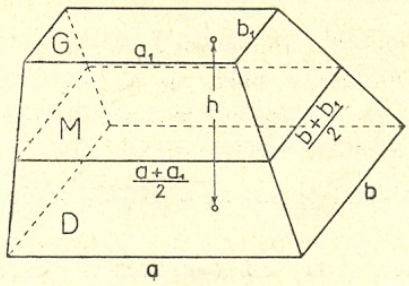
Okomita udaljenost obiju baza zove se *visina prizmatoida*, a obilježit ćemo je sa h.

Ako prizmatoid siječemo bilo kojom ravninom paralelno bazama dobijemo takozvani *paralelni presjek*. Ako je donja baza m-terokut, a gornja baza n-terokut, tada paralelni presjek može imati najviše $m+n$ vrhova.

Siječemo li međutim prizmatoid ravninom, koja je paralelna prema donjoj i gornjoj bazi, ali je od svake baze udaljena polovinu visine ($\frac{h}{2}$), tada ova ravnina siječe svaki bočni trokut po sredini, a sve bočne trokute u $m+n$ dužina, koje čine jedan $(m+n)$-terokut, koji se zove *srednji presjek* prizmatoida. Stranice ovog srednjeg presjeka nisu ništa drugo nego srednjice bočnih trokuta, koje su jednake polovini baze odgovarajućeg trokuta. Stoga se može zaključiti, *da je opseg srednjeg presjeka jednog prizmatoida jednak aritmetičkoj sredini opsega obiju baza.*



Sl. 9.



Sl. 10.

Treba još napomenuti, da gornja baza prizmatoida može biti točka, kao i dužina. Tada prizmatoid prelazi u *piramidu* odnosno *klin* (Sl. 9.). Isto tako prizmatoid postaje *prizma* odnosno *krnja piramida*, ako su baze perspektivno kongruentni odnosno perspektivno slični likovi. Prizmatoid, kome su osnovni bridovi u paru paralelni ali nisu proporcionalni, nego ma kakovi, zove se *obelisk*. (Sl. 10.). Naročiti je oblik obeliska, kad je sličan *pontonu*.

Da bismo našli volumen prizmatoida spojit ćemo jednu točku S unutar srednjeg presjeka s njegovim vrhovima, a zatim sa svim vrhovima gornje i donje baze. Tada će se srednji presjek M rastaviti na parcijalne trokute M_1, M_2, M_3, ... Sam pak

prizmatoid se raspada ponajprije u dvije piramide: donju $S(ABCE)$ i gornju $S(FHJ)$, t. j. u dvije piramide visine $\frac{h}{2}$, koje imaju zajednički vrh, a jednoj je baza D — donja baza prizmatoida, odnosno baza G — gornja baza prizmatoida. Prema tome je volumen jedne od tih piramida:

$$\frac{1}{3} \cdot D \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6} \cdot D$$

a druge:

$$\frac{1}{3} \cdot G \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6} \cdot G$$

odnosno uzete zajedno, daju volumen

$$\frac{h}{6}(D + G) \qquad (\star$$

Nakon što uklonimo ove dvije piramide, preostaje od prizmatoida jedno tijelo, koje je gore i dolje izdubljeno, ali koje mi također možemo rastaviti u piramide i to samo u trostrane, a dobit ćemo ih tako, da vrh S svaki put spojimo vrhovima pobočnih trokuta. Na pr. S spojeno s vrhovima A, B i H trokuta ABH, i t. d. Tako se dobiju piramide, kojima su baze upravo pobočni trokuti prizmatoida, a vrh im je zajednički u točki S, na pr. piramida $S(ABH)$, $S(AHF)$, i t. d.

Da bismo odredili volumen svake pojedine od ovih piramida, utvrdit ćemo najprije ovo: Iz slike 8. vidimo, ako uzmemo jedan pobočni trokut, na pr. $\triangle ABH$, i na bridu AB uzmemo u sredini točku N, pa je spojimo s točkama K i L srednjeg presjeka, a budući da je:

$$AH = 2 \cdot AK = 2 \cdot HK$$
$$BH = 2 \cdot BL = 2 \cdot HL$$

i

$$KL \parallel AB,$$

to slijedi, da dobijemo četiri sukladna trokuta:

$$\triangle ANK \cong \triangle NBL \cong \triangle KLN \cong \triangle KLH, \qquad \text{pa je}$$
$$\triangle ABH = 4 \cdot \triangle KLH.$$

Stoga je također piramida $S(ABH)$ jednaka četverostrukoj piramidi $S(KLH)$, jer ona ima istu visinu, a baza joj je samo četvrtina baze cijele piramide $S(ABH)$. Budući da se kod ovih pobočnih parcijalnih piramida radi o trostranim piramidama, može se i svaka njezina pobočna ploha uzeti za bazu. Uzmemo li tako dio M_1 srednjeg presjeka kao bazu piramide $S(KLH)$, to će visina te parcijalne piramide biti $\frac{h}{2}$, pa ćemo za volumen jedne od parcijalnih piramida naći da joj je volumen $\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot M_1$. Stoga će cijela pobočna piramida $S(ABH)$ imati prema tome volumen četiri puta veći, t. j.

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot M_1 = \frac{h}{6} \cdot 4M_1.$$

Učinimo li tako za svaku trostranu pobočnu piramidu, kojoj je baza po jedan pobočni trokut prizmatoida, dobit ćemo da su volumeni tih piramida:

$$\frac{h}{6} \cdot 4M_2; \quad \frac{h}{6} \cdot 4M_3; \quad \frac{h}{6} \cdot 4M_4; \ldots$$

Zbrojimo sve ove volumene pobočnih piramida, imat ćemo

$$\frac{h}{6} \cdot 4M_1 + \frac{h}{6} \cdot 4M_2 + \frac{h}{6} \cdot 4M_3 + \frac{h}{6} \cdot 4M_4 + \cdots = \frac{4h}{6}(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \cdots).$$

Ovaj izraz u zagradi nije međutim ništa drugo, nego upravo površina M srednjeg presjeka, pa ćemo stoga prednji izraz moći pisati ovako:

$$\frac{4h}{6} \cdot M \qquad (**)$$

To je u stvari volumen onog preostalog dijela prizmatoida, kad smo mu oduzeli one prve dvije piramide.

Zbrojimo li sada ove pojedinačne volumene (*) i (**) dobijamo:

$$V = \frac{h}{6} \cdot (D + G) + \frac{4h}{6} \cdot M$$

ili sredivši:

$$\textit{Prizmatoid:} \quad \boxed{V = \frac{h}{6}(D + 4M + G)}$$

a to je naša *Simpsonova formula* (1), u kojoj dakle D znači donju bazu, M srednji presjek, G gornju bazu i h visinu.

Ova se formula dade, kao što smo vidjeli, primijeniti na izračunavanje volumena cijelog niza tijela i za izračunavanje površina nekih likova. Formule za piramidu, prizmu, valjak, stožac, krnju piramidu, krnji stožac i kuglu sadržane su u njoj kao posebni slučajevi.

Ovako dobivena formula može se primijeniti i za izračunavanje volumena *klina* i za izračunavanje volumena *obeliska*.

1. Tako je kod *klina* (sl. 9.) [s pravokutnom bazom ab, visinom h i gornjom bazom, koja je degenerirala u dužinu a_1]:

$$D = ab, \quad G = 0, \quad M = \frac{a + a_1}{2} \cdot \frac{b}{2}.$$

Uvrstimo li ove vrijednosti, dobijemo:

$$V = \frac{h}{6}\left(ab + 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot \frac{b}{2} + 0\right) = \frac{h}{6}(ab + ab + a_1 b)$$

i konačno:

$$\textit{Klin:} \quad \boxed{V = \frac{h}{6}(2a + a_1) \cdot b}$$

2. *Koso sječena trostrana prizma* (sl. 11.) $ABC\ A_1B_1C_1$, koja se može smatrati klinom, kome je donja baza trapez $A\,A_1\,B_1\,B$ s paralelnim stranicama: $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, dok je oštrica $CC_1 = c$. Visina tijela je visina $LL_1 = h$ presjeka JKL normalnog na AA_1 s površinom Q; visina trapeza AA_1B_1B je baza $JK = h'$ ovoga presjeka. Iz slike vidimo da je

$$G = 0$$

$$M = \frac{\left(\frac{a + c}{2} + \frac{b + c}{2}\right)}{2} \cdot \frac{h'}{2}, \qquad D = \frac{(a + b)\,h'}{2}$$

Stoga će biti

$$D + 4M + G = \frac{h'}{2}(a + b + a + c + b + c) = h'(a + b + c),$$

pa je volumen tijela

$$V = \frac{hh'}{6}(a + b + c).$$

Kako je

$$\frac{h \cdot h'}{2} = Q,$$

imamo konačno

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

Dakle, *volumen koso sječene trostrane prizme jednak je produktu iz njenog normalnog presjeka i aritmetičke sredine njenih pobočnih bridova.*

3. Za *obelisk*, s pravokutnom gornjom i donjom bazom (Sl. 10.) srednji presjek je također pravokutnik. Ako donja baza ima stranice a i b, a gornja baza stranice a_1 i b_1, tada srednji presjek ima stranice: $\frac{a+a_1}{2}$ i $\frac{b+b_1}{2}$.

Prema tome imamo:

$$D = ab, \quad M = \frac{a+a_1}{2} \cdot \frac{b+b_1}{2}, \quad G = a_1 \cdot b_1$$

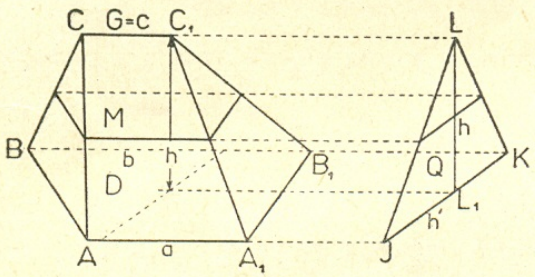
pa se dobije formula:

Obelisk:

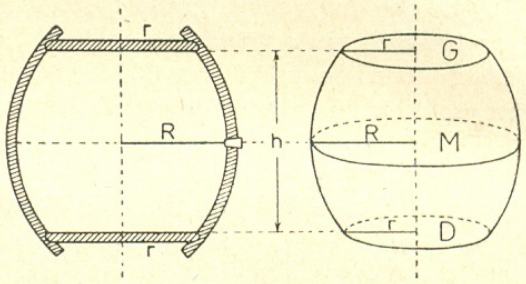
$$V = \frac{h}{6}\left[ab + 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot \frac{b+b_1}{2} + a_1 b_1\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left[(2a + a_1) \cdot b + (a + 2a_1) \cdot b_1\right].$$

Obelisk se razlikuje od prikraćene piramide u tome, što četiri pobočna brida ne leže na pravcima, koji bi se, sva četiri, sjekla u jednoj točci. Oni se šta više sijeku u četiri različite točke.



Sl. 11.



Sl. 12.

4. Evo jednog primjera iz svakidašnje prakse. Radi se o volumenu *bačve* (Sl 12.). Odrediti volumen bačve posve točno nije baš laka zadaća. O njoj je razmišljao i veliki astronom Kepler ostavivši među svojim matematičkim radovima specijalan rad o izmjeri bačve.

Postoje mnoge formule dobijene iz iskustva, koje vrijede s manjom ili većom točnošću.

Takva je na pr. formula:

$$V = \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2 \pi \cdot v,$$

gdje je R polumjer presjeka bačve po sredini a r je polumjer dna, v je visina.

Mi ćemo međutim primijeniti i na bačvu Simpsonovu formulu (1).

Imamo: $D = G = r^2\pi$, $M = R^2\pi$,

pa je:

$$V = \frac{h}{6}(r^2\pi + 4R^2\pi + r^2\pi) = \frac{2h\pi}{6}(2R^2 + r^2) = \frac{h\pi}{3}(2R^2 + r^2).$$

Uvedemo li mjesto polumjera promjere, koji su zgodniji za mjerenje, dobijemo:

$$V = \frac{h\pi}{3}\left(2 \cdot \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4}\right) = \frac{h\pi}{12}(2D^2 + d^2).$$

Izračunamo li koeficijent $\frac{\pi}{12} = 0{,}262$, imamo konačnu za praksu vrlo zgodnu i jednostavnu formulu:

Bačva: $$\boxed{V = 0{,}262 \cdot h \cdot (2D^2 + d^2).}$$

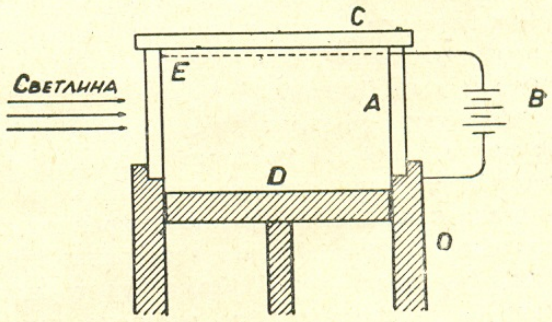
Da završimo! Bez sumnje smo mogli razabrati, kako je široka primjena Simpsonove formule, i kako odatle proizlazi i njezina velika važnost u praktičnoj primjeni. Mogu napomenuti, da se i za izračunavanje brodskog prostora dobija formula složena višestrukom primjenom Simpsonove formule.

Na završetku treba da ispravimo griješku, koja se uvukla u izvođenju na str. 75 red 15 odozdo. Izvod treba da glasi ovako: Ako označimo sa h visinu krnje piramide, a sa x visinu dopunjka, tada imamo $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{D} - \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$ (poznato iz stereometrije), a za presjek M: $\frac{h}{2x} = \frac{\sqrt{M} - \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. Dijeljenjem izlazi $2\sqrt{M} = \sqrt{D} + \sqrt{G}$ ili $4M = D + 2\sqrt{DG} + G$. Ovo uvršteno u Simpsonovu formulu daje $V = \frac{h}{3}(D + \sqrt{DG} + G)$.

Вилсонова и дифузиона комора

Доц. ОРДАН ПЕЧИЈАРЕ, Скопје

Меѓу многобројните зрачења со коишто ние во природата се сретнуваме поголем број се такви што не можат да бидат директно откриени со нашите чула, било поради природата на самите ефекти коишто тие ги предизвикуваат, било поради нивниот слаб интензитет. Но и за откривање и испитување на овие незабележливи зрачења постојат пове'ке методи и уреди, коишто ни овозможуваат нивните почетни незабележливи ефекти да ги претвориме во ефекти достапни за нашите чула. Поголем број од нив се основани на особината на овие зрачења да вршат директна или индиректна јонизација на гасовите низ кои минат. Директна јонизација вршат оние зрачења што се составени од наелектризирани честици: алфа-честици, бета-честици, протони и други; а индиректна оние зрачења што се составени од ненаелектризирани честици, како што се на пример неутроните и фотоните.



Сл. 1. Шема на Вилсонова комора

Откривањето и испитувањето на овие зрачења има грамадно значење за современата јадрена физика, бидеј'ки ни овозможува да проникнеме подлабоко во строежот на материјата, т. е. да ги откриеме и испитаме »елементарните« честици на материјата, како и да преворуваме еден елемент во друг и ја ползуваме грамадната енергија што се ослободува при овие претворувања.

Два од многуприменуваните и важни уреди за испитување на споменатите зрачење, основани на нивната директна односно индиректна јонизациона способност, се **Вилсоновата комора,** сл. 1, а во поново време и **дифузионата комора, сл. 6.**

Вилсоновата комора обично се состои од еден стаклен цилиндер **А**, што се јавува како продолжение на еден метален цилиндер **О**. Стаклениот цилиндер одозгора е затворен со една глатка стаклена плоча **С**, а одоздола со едно подвижно метално бутало **Д**, чија што горна површина е поцрнета. Ме'гу буталото **Д** и стаклената плоча **С**, т. е. во работниот волумен на самата комора, се најдува воздух или некој друг гас заситен со пара на некоја течност, обично вода, етил алкохол, метил алкохол или пак смеса на овие. За да биде воздухот заситен со пара, во стаклениот цилиндер секогаш се најдува мало количество од употребуваните течности.

Ако буталото брзо се спушти, воздухот во цилиндерот одеднаш се раширува. При ова адијабатско раширување, т. е. без размена на топлината со надворешната средина, тој се разладува и станува преситен со пара, т. е. содржи пове'ке пара отколку што може нормално да содржи на дадената температура. Овој вишок на парата се одделува во зид на ситни капкици што се формираат на разни прашинки или јони содржани во комората, а кои во случајов послужуваат како центри за кондензација. На овој начин во целиот работен волумен на комората се образува густа белузлава магла. При мали спуштања на буталото магла може и да не се формира. За комора наполнета со воздух и водена пара, капкици се формираат на јоните при зголемување на волуменот на комората приближно за една третина од почетниот волумен.

Ако воздухот и водената пара во Вилсоновата комара се без прашинки и во комората нема јони, т. е. нема никакви центри на кои би се извршила кондензација, тогаш преситената состојба може да потрае подолго време, без да стане формирање на могла односно кондензирање на вишокот на парата.

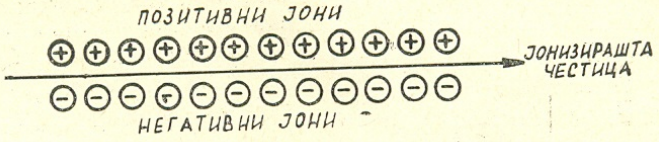
За исчистување на воздухот и водената пара од разни прашинки што можат да послужат како центри за кондензација, достаточно е неколку пати едноподруго да се изврши спуштање на буталото односно раширување на воздухот во комората, па да тие прашинки, заедно со капкиците на маглата формирани на нив, паднат на дното на комората. После ова како центри за кондензација во комората се јавуваат само јоните с'е дури е $1{,}23 < \frac{V_2}{V_1} < 1{,}38$, каде што е V_1 волуменот на комората пред адијабатското паширување, а V_2 волуменот после раширувањето.

За отстранување на »старите јони«, т. е. јоните што ги има во комората и пред извршената јонизација од испутуваното зрачење односно за отстранување на јоните што ги создало самото зрачење, а кои се јавуваат ве'ке како пречка, во комората се создава нејако електрично поле. За таа цел внатрешната страна на стаклената плоча **С** се прилепува една метална мрежичка **Е** или прстен од метален лист. На шемата, сл. 1, тоа е претставено со цртички. Оваа мрежичка односно прстен се сврзува со едниот пол на една батерија **Б** од стотина волти и пове'ке, а пак другиот пол на батеријата се сврзува со металниот дел на цитиндерот **О**. На овој начин внатре во комората се создава нејако електрично поле, кое брзо ги упатува, »старите јони« кон мрежичката односно металниот цилиндер, во зависност од нивниот знак, и комората се оспособува да се оцрта во неа патот на јонизираштата честица како маглен траг формиран од капкици образувани на оние јони што ги создала таа на својот пат непосредно пред експанзијата, за време на експанзијата или одма после неа. Набљудувањето или фотографирањето се врши преку плочата **С**, а осветљувањето отстрана, низ зидовите на стаклениот цилиндер, како што е на шемата претставено.

Еве сега како можеме да го опишиме механизмот на работата на Вилсоновата комора. До началото на експериментот буталото се најдува во најгорната положба, т. е. работниот волумен на комората е најмал. Воздухот во неа е заситен со пара и има собна температура. Јонизираштите зрачења влегуваат во комората през опре-

делено место на зидовите на комората или пак се емитираат од некој извор што се најдува во самата комора. Пролетувај'ки низ воздухот на комората, тие го јанизираат, создавај'ки на својој пат еден вид низа од позитивни и негативни јони, сл. 2, кои се движат бавно.

Иако комората одстрана се освртлува со силна светлина, никаков траг на јонизираштето зрачење што минало низ неа не може да се примети, бидеј'ки експанзијата на гесот во комората не е извршена и на формираните јони по должи-



Сл. 2. Формирање на јони во воздухот под дејството на една наелектризирана честица

ната на пакетите на јонизираштите честици не станала никаква кондензација. Овие јони се упатувани од електричното поле во комората на соодветните електроди, каде се неутрализираат, а на нивно место јонизираштето зрачење формира нови јони.

Кога пак во даден момент буталото се спушти одеднаш за определена величина, воздухот во комората брзо се раширува, разладува и станува преситен со пара. Ако на неколку стоти делови од секунда пред или после овој момент или пак през самото тоа време прелетала низ воздухот на комората некоја јонизирашта честица, на пример алфа-честица, тогаш на јоните создадени од неа на нејзиниот пат, што за кратко време после нивното формирање не успева да ги придвижи приметно ни топлинското движење ни електричното поле, одма станува кондензација на вишокот на парата. На овој начин се формираат мали капки, што ја оцртуваат патеката на јонизираштата честица во вид на сјајна белузлава маглена линија. Овој траг се одржува во воздухот на комората обично само неколку десетти делови од секунда, што е извонредно кратко за да се испита. Заради тоа тој најчесто се фотографира и испитувањата се вршат на самата фотографија.

Фотографирај'ки истовремено со два апарата, згодно поставлени во однос на комората, и наблјудувај'ки ги двете добиени фотографии низ еден степеоскоп, може да се види каква била вистинската положба во просторот на патеката на дадената честица.

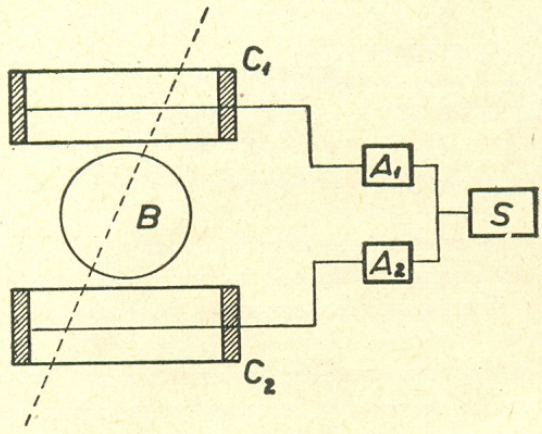
После извршеното наблјудување или фотографирање, буталото се дига горе, т. е. се смалува волуменот, температурата на воздухот и парата во комората се изедначува со температурата на околната средина, притисокот под кој работи комората си ја добива својата нормална вредност и комората е готова за нов обод.

Најкраткото време што треба да мине од една експанзија на комората до друга, па да комората биде во состојба да реагира потворно на испитуваното зрачење, се вика »м р т в о в р е м е«. Во зависност од конструкцијата на самата комора ова време може да биде од неколку секунди па до неколку минути. Со зголемување на притисокот под кој работи комората, се зголемува и ова време.

Ако пак за време на експанзијата нема јони во комората, тогаш преситената состојба може да потрае уште извесно време, што зависи од топлината што се предава од зидовите на комората на гасот во неа, како и од топлинскиот капацитет на гасот. Ако за ова време се формираат јони во гасот, тогаш на нив'ке настане кондензација. Ова време, за време на кое комората може да дејствува, се вика »п о л е з н о в р е м е«. И ова време зависи од конструкцијата на самота комора и се движи отприлика од 0,01 до 0,1 секунди. Со зголемување на притисокот под кој работи комората се зголемува и нејзиното полезно време.

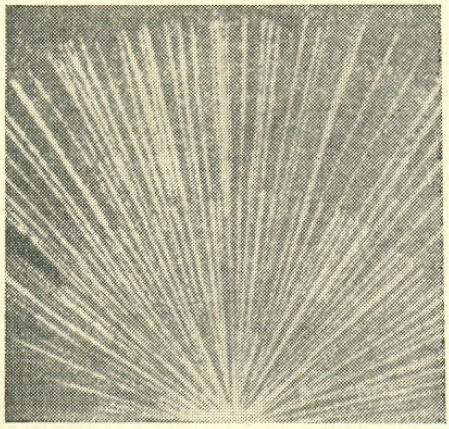
Траговите на јонизираштите честици што минале низ комората за време на експанзијата односно непосредно пред самата експанзија или одма после неа се најоштри, а траговите на честиците што минале порано се понејасни поради дифузијата на формираните јони.

При современите Вилсонови комори скоро целиот процес на работата е механизиран. Со еден потез се врши и спуштање на буталото, т. е. ширење на воздухот во комората, и осветлување и фотографирање. Дури за почетокот на овој процес може да даде знак и самата јанизираштa честица што се испитува. За таа цел комората обично се сврзува во коинциденција со два Гајгер-Милерови бројачи, сл. 3. При овој случај, како што се гледа од сликата, комората се поставува ме'гу два бројачи C_1 и C_2, така да честицата чии што импулс е регистриран од двата бројачи, мине и низ комората, Механизмот S, што к'е ја стави комората и фотографскиот апарат во дејство, се ставува во движење само тогаш ако тој едновремено ги прими преку усилителите A_1 и A_2 импулсите од двата бројачи, т. е. само тогаш ако честицата минала низ двата бројачи и комората. На овој начин честицата како сама да си го фотографирала својот траг во Вилсоновата комора. Ваков спој, како што рековме, се вика спој во коинциденција и се употребува за регистрирање на ретки појави.

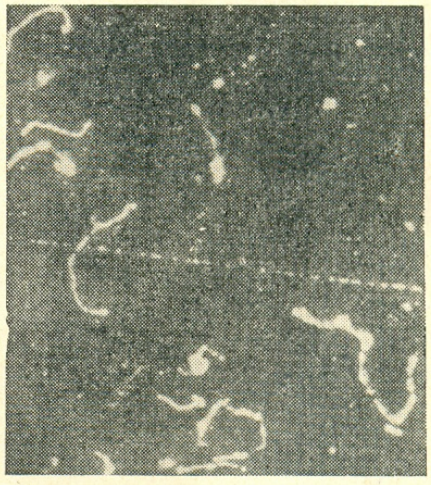


Сл. 3. Вилсонова комора ме'гу два Гајгер-Милерови бројачи што се во коинциденција, за аутоматска експанзија и фотографирање

На сл. 4 е претставена една фотографија на грагови добиени во Вилсонова комора од алфа-честици испуштани од ThC и ThC'. На оваа фотографија сосем



Сл. 4. Трагови на алфа честици испуштени од ThC и ThC', фотографирани во Вилсонова комора



Сл. 5. Трагови на спори електрони и на еден брз електрон фотографирани во Вилсонова комора

јасно се оцртаваат два групи трагови оставени од два различни групи алфа-честици, т. е. алфа-честици испуштани од ThC и ThC'. Подолгите трагови се оставени од алфа-честици на ThC', што е знак дека тие имаат поголема енергија од алфа-

честиците испуштани од ThC. Од друга страна пак оваа фотографија ни покажува на кој начин може Вилсоновата комора да биде исползувана за докажување дали сите алфа-честици испуштани од даден радиоактивен препарат имаат еднаква енергија или не.

При внимателно набљудување на фотографијата може да се види дека траговите немаат по целата своја должина иста дебелина. Во почетокот тие се потанки отколку при крајот. Исто така праволинејноста на траговите пове'ке е запазена при нивниот почеток отколку при нивниот крај. Од овие два факти извлекуваме заклучок, дека алфа-честиците со поголема енергија, каква е секоја алфа-честица при напуштањето на радиоактивниот препарат, имаат помала јонизирашта способност, т. е. образуваат помал број јони на единица должина од својот пат и понастојчиво си го запазуваат својот правец на движење отколку при крајот на патот, кога нивната енергија е помала и поради судирите полесно си го изменуваат својот правец на движење.

И патеките на бета-честиците, т. е. електроните стануваат видливи во Вилсоновата комора. На сл. 5 е дадена фотографијата на траговите на повéке спори електрони и на еден брз електрон, што ги оставиле при своето движење во Вилсонова комора.

Од фотографијата не е тешко да се уочи големата разлика ме'гу траговите на спорите и брзите електрони. Траговите на спорите електрони се погусти (подебели) отколку на брзите, што значи спорите електрони имаат поголема јонизирашта способност отколку брзите, т. е. на еден сантиметар од нивниот пат низ комората се Формира поголем број јонски парови, па спрема тоа и капкици, што го и прават трагот видлив и погуст отколку при брзите електрони.

Спорите електрони имаат поголема јонизирашта способност од брзите електрони заради тоа, што тие, поради помалата брзина пове'ке време се движат во непосредната близина на молекулите што ги сретнуваат на својот пат отколку што е тоа случај со брзите електрони, т. е. имаат пове'ке време за дејство, па оттука и подобри услови за јонизација. Покрај тоа траговите на спорите електрони секогаш се искривени и неправилни, што се должи на големиот број судари што стануваат со изменување на правецот на нивното движење.

Праволинискиот и поредок траг на фотографијата е траг на еден брз електрон. Општо земено брзите електрони даваат скоро праволиниски трагови, што значи бројот на судирите поради кои станува промена на правецот на движењето е помал во споредба со спорите електрони. Тие имаат послаба јонизирашта способност отколку спорите електрони и поради тоа бројот на капкиците што се формираат на еден сантиметар од нивниот пат е помал и трагот што го гледаме поредок и потанок отколку при спорите електрони.

Ако направиме споредба на траговите што ги остават алфа-честиците и бета-честиците во Вилсоновата комора, тогаш можете да дојдеме до следниот заклучок: Траговите на бета-честиците ни изгледаат како да се формирани од капкици одделни една од друга, што не е случај при траговите на алфа-честице. Ова е нарочно приметно за брзите бета-честици, помалце приметно за спорите бета-честици, чии трагови се непрекинати дебели линии, што се должи на нивната голема јонизирашта способност. На овој начин по изгледот на траговите може да се суди и за видот на честиците што ги оставиле тие трагови, како и за енергијата и смерот на движењето на испитуваните честици.

По индиректан пат со Вилсонова комора можат да бидат откриени и испитани и неутроните. Откривањето и регистрирањето на неутроните може да стане или

преку јонизацијата што ја вршат протоните испуштани од една парафинска плочица поставена пред комората и бомбардирана со испитуваните неутрони или пак преку јонизацијата предизвикана од зрачењата што ги следат јадрените реакции прдизвикувани со неутрони. Покрај другото тие можат да бидат откриени и по јонизацијата што ја вршат протоните испуштани од некој гас, што се најдува во комората и е богат со водород, кога тој гас се бомбардира со неутрони.

Големо усовршување на Вилсоновата комора е направено со создавањето во неа нејако и приближно хомогено магнетно поле. На овој начин комората е приспособена, поред другото, и за определување на знакот на наелектризираните честици.

(Svršit će se)

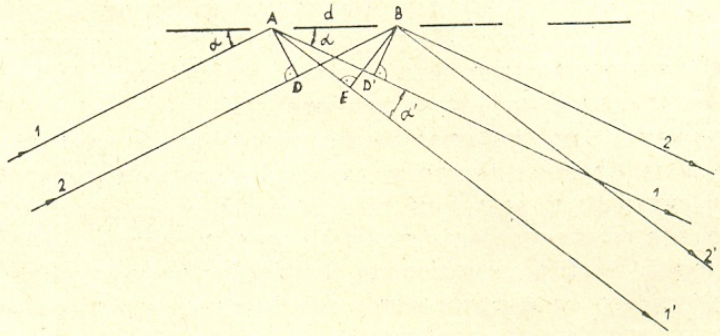
IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Gramofonska ploča kao optička rešetka

Prikazat ćemo ovdje jednostavnu metodu, pomoću koje možemo objektivno promatrati spektar dobiven gramofonskom pločom, koja nam služi kao optička rešetka, a uz to i mjeriti valnu dužinu svjetlosti.

Difrakcioni spektar dobivamo refleksijom svjetlosti na udubinama gramofonske ploče. (sl. 1.).

Optički sistem s izvorom svjetlosti, smješten je tako, da osvjetljuje usku pukotinu S (širina pukotine neka bude 1 mm). Zrake svjetlosti s pukotine dolaze na sabirnu leću L (f = 20 cm), koja stvara sliku S' izvora S na udaljenom zastoru od



Sl. 1.

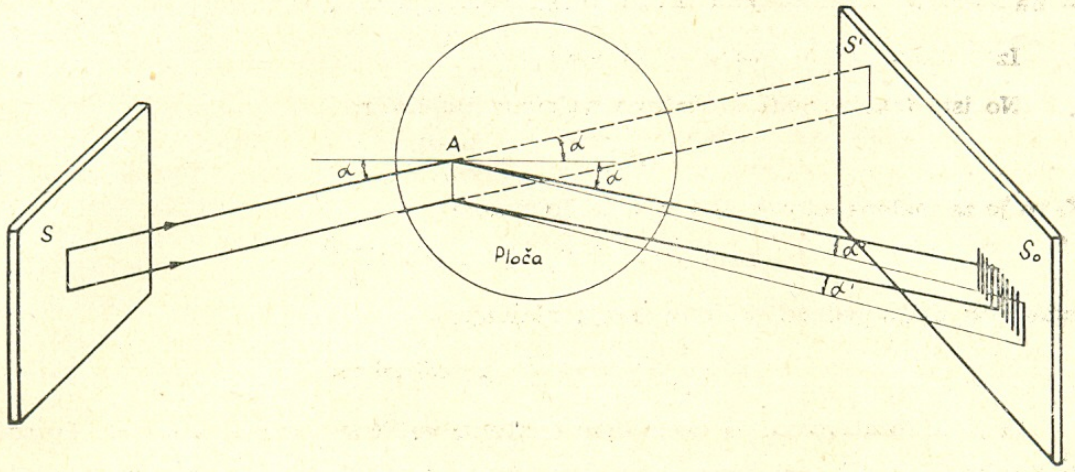
mutnog stakla. Gramofonska ploča se tada umetne između leće i zastora tako, da njena udubljenja budu paralelna s pukotinom S. Što je kut između ploče i snopa upadne svjetlosti manji, to će dobiveni spektar biti duži. Na zastoru promatramo niz redova difrakcionog spektra.

Ako je snop upadne svjetlosti monokromatski, tada na zastoru dobivamo niz tamnih i svjetlih pruga monokromatske svjetlosti.

Na sl. 2. prikazano je kako dolazi do interferencije difraktiranih zraka svjetlosti. Svako udubljenje na ploči je ujedno i mjesto gdje se zrake reflektiraju.

Zrake *1* i *2* upadaju na udubljenja A i B pod nekim kutom α. Pod istim se kutom zrake svjetlosti reflektiraju. Ukupna razlika u hodu za zrake *2* i *1* $DB - AD' = 0$, budući da je $DB = AD'$. — Znači, u smjeru, koji s pločom čini kut α, sve su zrake u fazi. Na zastoru sve se te zrake interferencijom pojačavaju.

No, zbog ogiba, zrake se ne će širiti samo u smjeru, koji sa pločom zatvara kut α, već u svim smjerovima. Promatrajmo, kako će interferirati zrake, koje s pločom zatvaraju kut $\alpha + \alpha'$.



Sl. 2.

Ukupna razlika u hodu za zrake $1'$ i $2'$ jest

$$DB - AE = d \cos \alpha - d \cos (\alpha + \alpha').$$

Ako je uz to

$$d \cos \alpha - d \cos (\alpha + \alpha') = n\lambda, \tag{1}$$

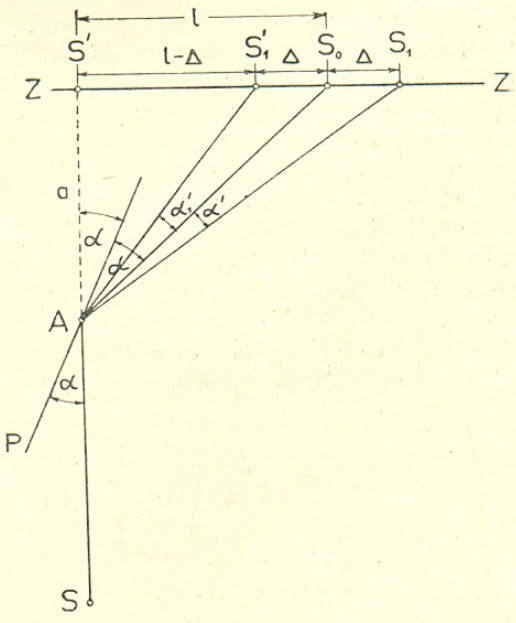
dobivamo interferencijom na zastoru svijetlu prugu. Ako je pak

$$d \cos \alpha - d \cos (\alpha + \alpha') = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

dobivamo na zastoru tamnu prugu.

Iz jedne od ovih dviju jednadžbi možemo eksperimentalno odrediti dužinu vala neke monokromatske svjetlosti. Prednost ove metode leži u jednostavnosti, a i točnosti, kojom možemo odrediti konstantu d ove mrežice, bez mikrometarskih mjerenja.

Stavimo ploču na gramofon, da se normalno okreće. Na rub ploče prilijepimo uski komadić papira, a pokraj njega stavimo neku oznaku (ravnalo, tako da ono stoji vertikalno uz rub ploče). Brojit ćemo broj okretaja N, dok se igla pomiče od vanjskog kruga do unutarnjeg. Svaki put, kad papirić na ploči prolazi pokraj ravnala, brojimo jedan okretaj. Udaljenost D, između ekstremnih udubljenja (krugova) izmjeri se ravnalom, a omjer $\frac{D}{N}$ daje nam širinu d svake linije. Ostaje nam, da još izmjerimo kutove α i α'.



Sl. 3.

Na sl. 3. vidimo, da je ploča P udaljena od zastora ZZ za razmak a. To je udaljenost od mjesta, gdje snop zraka svjetlosti upada na ploču do zastora. Na zastoru

ZZ zabilježimo položaj slike S' izvora S, koju smo dobili pomoću leće L, dok još nismo stavili ploču na put zraka svjetlosti. Centralnu svijetlu prugu dobivamo na zastoru na mjestu S_0. Udaljenost $S'S_0 = l$ i možemo je izmjeriti. S_1 je mjesto, gdje se na zastoru nalazi svijetla pruga n-tog reda. $S_0S_1 = \Delta$.

Iz trokuta $AS'S_1$ imamo $tg\,(2\alpha + \alpha') = \dfrac{l + \Delta}{a}$.

No isto tako vrijedi, s obzirom na simetriju linija,

$$tg\,(2\alpha - \alpha') = \frac{l - \Delta}{a}.$$

Kako je za malene kutove $tg\,\alpha \approx \alpha$ to dobivamo

$$2\alpha + \alpha' = \frac{l + \Delta}{a}, \quad 2\alpha - \alpha' = \frac{l - \Delta}{a},$$

sistem od dviju jednadžbi, koje imaju rješenja:

$$\alpha = \frac{l}{2a}, \quad \alpha' = \frac{\Delta}{a} \quad \text{(u radijanima)}.$$

Iz sl. 3. razabiramo, da ćemo lako izmjeriti veličine l, a i Δ, a $d = \dfrac{D}{N}$. Pomoću jednadžbe (1) ili (2) naći ćemo valnu dužinu odgovarajuće monokromatske svjetlosti.

Branka Mikuličić, Zagreb

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Prvo takmičenje u matematici učenika zagrebačkih gimnazija

Društvo matematičara i fizičara NRH organiziralo je u mjesecu studenom i prosincu 1958. god. takmičenje u matematici učenika zagrebačkih gimnazija.

Takmičenje je imalo dva dijela. Najprije je proveden izbor najboljih matematičara pojedinih razreda po gimnazijama, gdje je sudjelovalo oko 350 učenika. Iz svakog odjeljenja (od VI. do VIII. razreda odnosno po novom: od II. do IV. razreda) takmičila se najviše po tri učenika. Po dva najbolja učenika iz svakog razreda jedne škole, ukupno 48 učenika, sudjelovala su u finalnom takmičenju. Zadaci su bili uzeti iz građe, koju su učenici obrađivali u prošloj školskoj godini.

Evo zadataka iz finalnog takmičenja:

VI. razred

1. $$\frac{\left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right)}{\left(\dfrac{1+x}{2-2x} - \dfrac{1-x}{2+2x} - \dfrac{2x^2}{x^2-1}\right) \cdot \dfrac{1-x}{2x}}.$$

2. Riješi sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ x + 2y + 3z &= 2a \\ x + 4y + 4z &= 3a \end{aligned}$$

i odredi a tako, da rješenje sistema bude trojka negativnih brojeva.

3. Zadan je polukrug polumjera r i na njemu točka T, koja se projicira na promjer AB u točki N. Nacrtaj $AT = TC$ i $BT = TD$.

a) Pokaži, da je $ABCD$ romb. Može li lik $ABCD$ biti i kvadrat?

b) Odredi geometrijsko mjesto vrhova C i D, ako se T kreće po polukružnici.

c) Kolika je površina lika $ABCD$, ako je

$$TN = \frac{r\sqrt{3}}{2}?$$

4. Konstruiraj trokut, ako je zadano:

$$a, \quad c - b \quad \text{i kut } \alpha.$$

VII. razred

1. U jednadžbi $(2a - 1)x^2 - (3a + 2)x + 1 + 5a = 0$ odredi a tako, da jedno rješenje bude $\dfrac{2}{3}$ drugoga.

2. Riješi jednadžbu:

$$\log_4 \{ 2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)] \} = \frac{1}{2}.$$

3. U kružni odsječak, kome je središnji kut 120^0, upisan je kvadrat sa stranicom od 3 *cm*. Nađi polumjer kružnice.

4. Tetraedar upisan u kugli polumjera r presiječe se u raspolovištu visine ravninom paralelnom s osnovicom tetraedra. Kako se odnose obujmovi segmenata, u koje se kugla tim presjekom raspada?

VIII. razred

1. Pravac $5x - 6y + 15 = 0$ siječe os x u točci A, pravac $x + y - 8 = 0$ siječe je u

točci B. Sjecištem C tih pravaca povuci pravac, koji dijeli

a) površinu trokuta ABC, *b*) stranicu AB, *c*) kut ACB

na dva jednaka dijela.

Kako glase jednadžbe tih pravaca?

2. U istokračni trokut stranice a i kuta na vrhu 2α upisani su kvadrati tako, da im se po dvije stranice dodiruju, gornji vrhovi da padaju u krakove istokračnog trokuta. Dokaži, da površine tih kvadrata čine konvergentni geometrijski niz za svako moguće 2α. Kolika je suma toga niza?

3. U trokutu je zadano:

$$c = 40, \quad P = 240, \quad \gamma = 93^0\,41'\,43''.$$

Kolike su ostale stranice i kutovi?

4. Riješi jednadžbu:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos^2 x} = \sin(x + 30^0)\sin(x - 30^0).$$

Rezultati takmičenja proglašeni su u Matematičkom institutu na priredbi održanoj 22. prosinca. Tom prilikom održao je učenicima sveuč. prof. dr. Đ. Kurepa kraće predavanje »O suvremenoj ulozi matematike«.

Knjigama su nagrađena po tri najbolja učenika iz svakog razreda.

Predsjednik Društva matematičara i fizičara dr. B. Maksić podijelio je nagrade u matematičkim i fizičkim knjigama.

Imena nagrađenih učenika:

u VI. razredu

Herkov Vesna iz III. gimnazije, Končar Danko iz VII. gimnazije, Paar Vladimir iz V. gimnazije »Bogdan Ogrizović«.

u VII. razredu

Vidlanović Dragan iz I. gimnazije, Jelovica Željko iz IV. gimnazije, Galunić Magdalena iz III. gimnazije.

u VIII. razredu

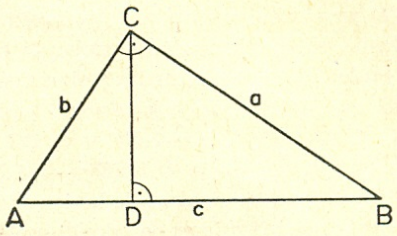
Hendeković Josip iz II. gimnazije, Bodlović Petar iz I. gimnazije, Mardešić Nino iz III. gimnazije..

Učenici su s velikim interesom sudjelovali u takmičenju i žele, da se s takvim i sličnim akcijama i dalje nastavi.

V. Benčić

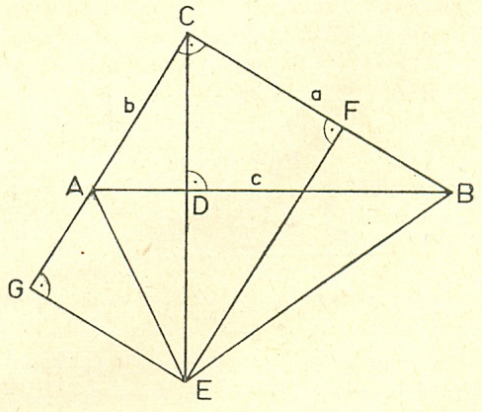
Najjednostavniji dokaz Pitagorina poučka

Neki ravni lik prekrili smo mrežom kvadrata sa stranicom a. Neka površina P toga lika sadrži n tih kvadrata, t. j. neka je $P = n\,a^2$. Ako spomenuti lik zajedno s mrežom kvadrata povećamo ili umanjimo, dobit ćemo njemu sličan lik; u tom liku stranica a_1 novog kvadrata homologna je stranici a. Očito je, da se broj n nije promijenio, t. j. površina je novog lika $P_1 = n\,a_1^2$. Riječima: Površine sličnih likova upravno su razmjerne kvadratima nad homolognim dužinama.



Sl. 1.

Pogledajmo sad pravokutni trokut ABC (sl. 1.), komu su a i b katete, a c hipotenuza! Visina CD dijeli ga na dva pravokutna trokuta BCD i ACD, koji su po prvom poučku o sličnosti trokuta slični među sobom, a slični su i trokutu ABC. Kako su stranice a, b i c u tim trokutima homologne dužine, to su njihove površine redom: $P_1 = n\,a^2$, $P_2 = n\,b^2$, $P_3 = n\,c^2$. A evo je $\triangle BCD + \triangle ACD = \triangle ABC$, t. j. $n\,a^2 + n\,b^2 = n\,c^2$ *ili* $a^2 + b^2 = c^2$, a to je Pitagorin poučak u aritmetičkom obliku.



Sl. 2.

Pitagorin se poučak može dokazati na bezbroj načina, ali nijedan nije tako jednostavan kao gornji. To je stoga, što je

pravokutni trokut jedini ravni lik, koji se crtom može razdijeliti u dva različita, a među sobom i cijelom liku slična dijela. Ako se dakle nad stranicama pravokutnog trokuta kao homolognim dužinama konstruiraju tri slična lika, onda u svakom slučaju, osim u gornjem, valja dokazati, da je zbroj likova nad katetama jednak liku nad hipotenuzom.

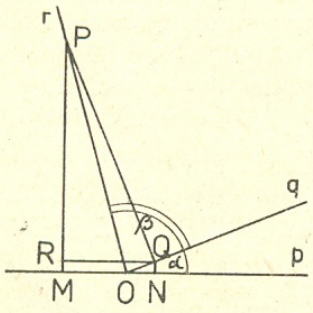
Na pr. Ako visinu CD pravokutnog trokuta (sl. 2.) produljimo preko D do E, da bude $CE = c$, i spustimo okomice EF i EG na katete, iz sukladnosti trokuta CEF, CEG i ABC izlazi $EF = a$, $EG = b$. Iz slike vidimo, da je $\triangle BCE + \triangle ACE = AEBC$. Prvi je trokut jednak polovici kvadrata sa stranicom a, drugi polovici kvadrata sa stranicom b, a četverokut $AEBC$ jednak je polovici kvadrata sa stranicom c, pa posljednja jednadžba prelazi u

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2 \quad \text{ili} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

S. Šk-a.

Prilog adicionim teoremama

Na ovom mestu[1] pisac je izložio jedan način za dobijanje adicione teoreme za funkciju sinus. Ovde se nastavlja ista misao uz jednu vrstu uopštenja za uglove α i β.



Sl. 1.

Kada se u kursu trigonometrije izlaže odeljak goniometrije (mnoštvo obrazaca), tada se obično geometriskom metodom (pomoću slike) dokaže prva relacija

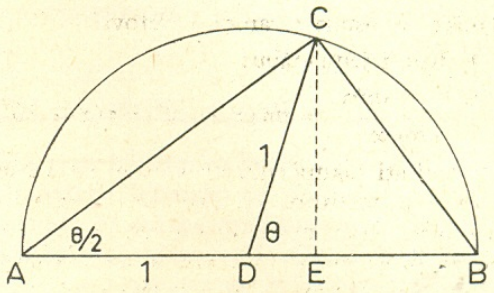
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

a sve ostale veze prikazuju na osnovu n e k i h transformacija koje sami uvodimo. Tako, na pr. za razliku uglova imamo svođenje na zbir

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)].$$

Ovome treba dodati da se vrlo retko pominje i detalj o važnosti izraza (1) za razne vrednosti zbira uglova $\alpha + \beta$.

Ovde je cilj ukazati na činjenicu da se svaki goniometriski obrazac može interpretirati »čisto geometriski«, sa slike, a što dovodi do očiglednosti i boljeg razumevanja prirode obrasca.[2]



Sl. 2.

U radu se izlažu dve stvari. Prvo, dokaz da teorema (1) važi za slučaj i kada je ugao $\alpha+\beta$ tup i drugo, prikaz obrasca $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ i funkcije udvojenog ugla uz pomoć slike.

Pretpostavimo da su uglovi α i β oštri, a da je njihov zbir u granicama od 90^0 do 180^0, tj.

$$0 < \alpha < 90^0, \quad 0 < \beta < 90^0, \quad 90^0 < \alpha + \beta < 180^0.$$

Tada sa slike 1 možemo da uočimo postupak za dokaz teoreme (1).

Imamo da je

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PM}{OP} = \frac{PR + RM}{OP} =$$

$$= \frac{PR}{OP} + \frac{QN}{OP} \quad (QN = RM)$$

Kako je iz trouglova PRQ i OQN

$$PR = PQ\cos\alpha, \quad QN = OQ\sin\alpha$$

to imamo

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PQ}{OP}\cos\alpha + \frac{OQ}{OP}\sin\alpha.$$

[1] Vidi: Dragan Trifunović; Još jedan dokaz adicione teoreme za funkciju sinus, Matematičko-fizički list br. 4 (1956—57), str. 146.

[2] Preporučuje se čitaocima da sami, originalnim crtežima, pokušaju izvođenje svih naučenih trigonometriskih obrazaca. Na primer, za obrasce o poluuglovima mogla bi da koristi slika 2.

Pošto je iz trougla OQP

$$\frac{PQ}{OP} = \sin\beta \qquad \frac{OQ}{OP} = \sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$$

to zadnja jednakost postaje

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

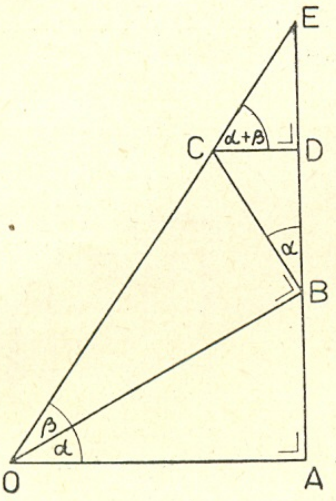
a što je trebalo i pokazati.

Rukovodeći se istom idejom izvođenja trigonometriskih obrazaca putem geometriske slike, moguće je bez većih napora prikazati i adicionu teoremu za funkciju tangens.

Sa slike 3, gde je $OA = 1$, $OA \parallel CD$, $CB \perp OB$, lako je uočiti sledeće jednakosti.

$$tg(\alpha + \beta) = AE = AB + BD + DE \quad (2)$$

Kako je iz trouglova OAB, OBC, BCD i CDE



Sl. 3.

$$AB = tg\alpha$$
$$BD = BC\cos\alpha = OB\,tg\beta\cos\alpha = \sec\alpha\,tg\beta\cos\alpha = tg\beta$$
$$DE = CD\,tg(\alpha+\beta) = BC\sin\alpha\,tg(\alpha+\beta) = OB\,tg\beta\sin\alpha\,tg(\alpha+\beta) = \sec\alpha\,tg\beta\,sin\alpha\,tg(\alpha+\beta) = tg\alpha\,tg\beta\,tg(\alpha+\beta)$$

to jednakost (2) daje

$$tg(\alpha+\beta) = tg\alpha + tg\beta + tg\alpha\,tg\beta\,tg(\alpha+\beta)$$

odakle je

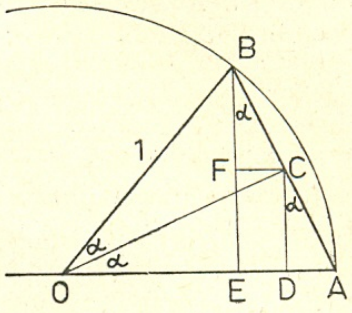
$$tg(\alpha+\beta)(1 - tg\alpha\,tg\beta) = tg\alpha + tg\beta$$

odnosno

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\,tg\beta}$$

a što je trebalo pokazati.

Za funkcije udvojenih uglova moguće je uzeti sliku 4, gde je $OB = OA = 1$.



Sl. 4.

Imamo da je

$$\sin 2\alpha = BE = 2DC = 2OC\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = OD - ED = CO\cos\alpha - BC\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2DC}{OD - ED} = \frac{2OD\,tg\alpha}{OD - CD\,tg\alpha} = \frac{2\,tg\alpha}{1 - \frac{CD}{OD}tg\alpha} = \frac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Dragan Trifunović, Beograd

O Paskalovom trouglu

Shema brojeva u vidu istostraničnog trougla poznata nam je pod imenom Paskalov trougao. Naši učenici znaju kako veliku korist pruža taj trougao kod razvijanja nekog binoma dignutog na proizvoljni eksponent ili da se kraće izrazimo kod takozvane binomne formule.

No ostavimo pitanje korisnosti te formule po strani, a postavimo sebi ovakvo pitanje: Da li je ispravno nazvati pomenutu shemu brojeva Paskalovim trouglom. Po svemu izgleda da nije i da nazivajući je Paskalovim trouglom činimo nepravdu u odnosu na pravo stanje stvari. Evo nekoliko historijskih podataka o ovoj materiji. Trouglasta shema brojeva t. j. aritmetički trougao dobila je ime Paskalov trougao u čast velikog francuskog matematičara i filozofa Blaise Pascal-a (Blez Paskal) koji se dosta bavio tim trouglom i napisao djelo o njemu pod naslovom »Traktat o aritmetičkom trouglu« koje je štampano 1665. g. t. j. po-

slije njegove smrti. No taj aritmetički trougao bio je poznat i prije. Naime u djelima kineskog matematičara Chu Shih Chieh (Ču Ši Ki) iz god. 1303. nalazimo slijedeću tablicu brojeva:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

Ovdje se tablica i završava. Ipak je i ova tablica dovoljna da upoznavši način izgradnje brojeva koji u nju ulaze možemo naći bilo koji binomni koeficijent. (Brojevi u ovom trouglu su ustvari binomni koeficijenti!).

Iako je dakle aritmetički trougao bio poznat kineskom matematičaru koga smo upravo spomenuli ipak nam to ne daje za pravo da njega proglasimo za otkrivača pomenutog trougla. U stvari takav trougao bio je poznat i prije njega indijskim matematičarima dva vijeka prije naše ere. To bi za sada bilo najstarije vremensko razdoblje od kada se zna za aritmetički trougao.

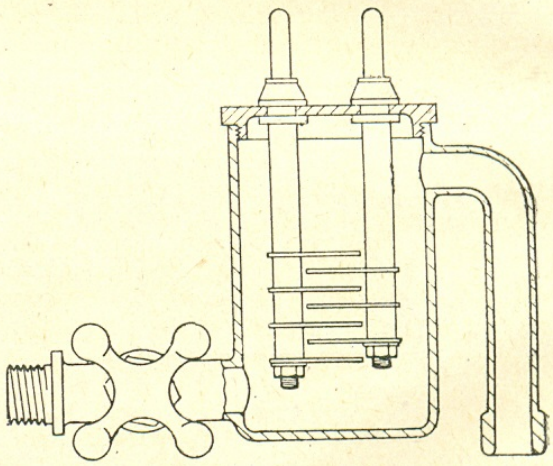
U prvoj polovini XV. vijeka u djelu »Ključ Aritmetike« koje je na arapskom jeziku napisao samarkandski matematičar i astronom Djemšid Kaši susrećemo ponovo aritmetički trougao. U Evropi je aritmetički trougao postao poznat po djelu znamenitog njemačkog matematičara Michaela Stifela po djelu »Cjelokupna aritmetika« izdanom 1544. godine.

Mičković Arkadije, Mostar

Protočni grijači vode

U novije vrijeme pojavili su se u upotrebi veoma praktični i jednostavni grijači vode, koji daju toplu vodu skoro trenutno i bez čekanja. Voda se, naime, ugrijava već za vrijeme proticanja kroz njih, pa su odatle dobili i ime. Glavna svojstva su im ekonomičnost i sigurnost u radu. Električnu energiju troše samo za vrijeme proticanja vode, a budući da su redovito montirani direktno na vodovodnu slavinu i time propisno uzemljeni, ne postoji opasnost od električnog udara.

Protočni grijač vode sastoji se iz masivnog metalnog kućišta, koje na suprotnim stranama ima po jedan otvor. U središtu kućišta nalaze se dva sistema elektroda izoliranih porculanskim izolatorima. Svaki elektrodni sistem je zapravo niz metalnih pločica, koje zalaze u prostor između pločica drugog elektrodnog sistema, što potsjeća na konstrukciju električnog kondenzatora. Elektrodama se dovodi struja iz gradske električne mreže pomoću izvoda na gornjoj strani kućišta. Voda, koja iz vodovodne slavine ulazi na donji otvor dolazi u dodir sa elektrodama, naglo se ugrijava i izlazi na gornji otvor napolje. Naša slika prikazuje presjek kroz talijanski protočni grijač »*Aquila*«.



Da bi razjasnili rad protočnog grijača vode moramo se najprije upoznati sa svojstvima vodovodne vode. Njezin točan kemijski sastav varira od mjesta do mjesta, pa i u istom gradu nailazimo na više tipova vode, već prema bunaru iz kojeg se crpi. Gruba kemijska analiza vodovodne vode pokazuje, da u njoj ima otopljenih karbonata, klorida i nitrata, kalcijevog i magnezijevog oksida, kremične kiseline i još nekih spojeva u manjim količinama. Sve te otopljene tvari čine vodovodnu vodu slabo lužnatom otopinom (u Zagrebu $P_H = 7{,}4$), koja je

sposobna da vodi električnu struju, pa se prema tome ponaša kao slabi elektrolit. Zbog električne disocijacije nalazit će se u vodi pozitivni i negativni ioni. Uronimo li u vodu dvije elektrode spojene sa nekim izvorom struje, pozitivni ioni teku prema katodi i zovu se kationi, a negativni ioni, anioni, putuju prema anodi. Kroz vodovodnu vodu teče dakle, ionska struja.

S druge strane možemo vodu, pošto smo utvrdili njenu električnu vodljivost, tretirati isto kao i ostale vodiče. Stupac vode dužine l i presjeka S imat će tada električni otpor R dan poznatom formulom:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

gdje je ρ specifični otpor vode, čija vrijednost varira između 1200 i 12000 om · cm. Isto tako će se u stupcu vode otpora R, kad njime prolazi struja I kroz vrijeme t razviti Joule-ovom zakonu količina topline:

$$W = R\ I^2\ t.$$

Upravo ta činjenica praktički je iskorištena u protočnom grijaču. Struja u njemu prolazi direktno kroz vodu i tako je ugrijava. Kako protjecanjem vode kroz grijač ugrijana voda stalno ustupa mjesto hladnoj, rezultat čitavog procesa je stalan tok tople vode u izlaznoj cijevi grijača.

Analogija sa metalnim vodičima električne struje nije potpuna. Osim toga što vodovodna voda ima mnogo puta veći specifični otpor od metalnih vodiča, njen otpor znatno se mijenja sa koncentracijom otopljenih tvari. Praktički to znači da će isti grijač u raznim gradovima trošiti različitu količinu električne energije makar je napon gradske mreže isti. Razlike u kemijskom sastavu vode pojedinih gradova su međutim male, pa se o tome obično ne vodi računa. Druga bitna razlika prema metalnim vodičima je mnogo naglije mijenjanje električnog otpora sa temperaturom. Ako vodeni stupac kod temperature od 20° C ima otpor R_{20}, onda će on kod temperature t^0 C imati otpor Rt dan empirijskom formulom:

$$R_t = \frac{40\ R_{20}}{20 + t},$$

što znači, da će otpor vodenog stupca kod 60° C iznositi samo polovicu prvotne vrijednosti, a kod 0° C narasti na dvostruki iznos. Iz toga se vidi, da je za ispravan rad protočnog grijača nužno osigurati kontinuiran dovod hladne vode, jer bi puštanje struje kroz vodu zaostalu u grijaču bez stalnog dovoda hladne vode izazvalo njeno naglo grijanje i nagli pad otpora, pa bi grijač trošio nenormalno jake struje.

Grijanje vode ovim postupkom povlači za sobom jednu u ovom slučaju nepoželjnu pojavu. To je elektroliza vode. Zbog prolaska struje voda se razgrađuje na vodik i kisik u omjeru 2 : 1. Budući da se protočni grijači priključuju redovito na mrežu izmjenične struje, elektroliza nije tako jaka kao kod istosmjerne struje. Ipak će i izmjenična struja od 1 A razviti na svakoj elektrodi grijača oko 500 cm^3 plina praskavca na sat. Zbog toga svi grijači, koji imaju vodovodnu slavinu na svojoj izlaznoj strani, moraju imati i sigurnosni ventil za otpuštanje elektrolizom razvijenog plina.

Na kraju, evo još praktične upute. Protočni grijač treba na gradsku mrežu spajati uvijek debljim žicama, jer on za vrijeme pogona troši relativno vrlo jaku struju, koja dosiže vrijednost od desetak ampera.

Z. Ogorelec, Zagreb

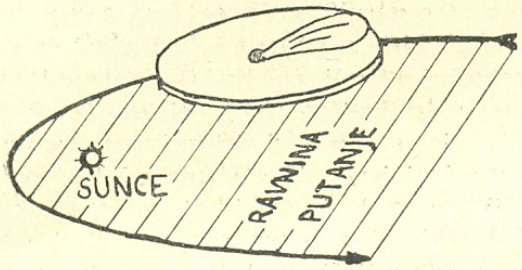
Komet sa dva repa

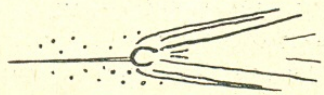
Od mnogih kometa, koji svojim neobičnim izgledom čine zanimljivu pojavu na nebu, vrlo ih je malo sa dva repa. Najčešće, oni zabacuju svoj rep u smjeru suprotnom od Sunca. Rep može imati različit izgled — kao stup koji postepeno iščezava, ili kao perjanica, a može se podijeliti i u više dijelova, struja. Drugi rep, »antirep«, opažen je u svega dva slučaja, 1823. i 1956. — a nazvan je tako zato, što je bitno različit od prvog, glav-

nog repa. Pruža se u suprotnom smjeru, t. j. od kometa k Suncu. Ni blizu nije tako bogatog izgleda kao glavni rep — slabašan je to, dugačak a uzak šiljak koji izlazi iz glave kometa.

Sada imamo ovakvu sliku: dok iz glave kometa izlazi na jednu stranu bogat, raskošan rep — na drugoj strani, prema Suncu, izlazi rep okružen laganom maglicom.

Pojava je podrobno proučena na kometu, koji se vidio u aprilu 1956. Snimljen je i na opservatoriju u Beogradu, a vidio se i prostim okom. Saznanje, do kojeg se došlo, može se izraziti ovako: čudno je, da se kod svih kometa u pravilu ne vide dva repa!





IZGLED SA STRANE

Općenito je svojstvo kometa, da šire oko sebe svoju materiju. Sastavljeni od čestica, kao što su meteori, dakle od zrnaca prašine i kamenja, a sa malom silom težom, od njih se ti djelići lako otrgnu i šire u prostor — i to pretežno u ravnini putanje. Tako se na putu oko Sunca zajedno sa najgušćim dijelom kometa, jezgrom kometa, kreće i to raspršeno kamenje okružujući komet kao kotač, koji leži u ravnini putanje. To se vidi na slici.

Kad Zemlja prođe kroz kotač, oblak čestica, ispred ili iza jezgre kometa, u atmosferi Zemlje pojavljuje se velika količina meteora-krijesnica, zvijezda padalica.

Zbog malene gustoće oblak raspršenih čestica nije moguće uvijek ugledati: Samo onda, kada Zemlja stoji sa strane oblaka, »porebarke«, pa pogled prodire kroz čitav kotač, može se sloj čestica ugledati.

Karakter repova kometa je, prema tome, sasvim različit. Dok se pravi rep sastoji od usijanih plinova — koji su nastali isparavanjem iz jezgre kometa uslijed zagrijavanja Suncem — dotle se drugi, »pomoćni« rep sastoji od hladne krute materije. Drugi rep bi se vidio i unutar prvoga repa — jer je jezgra kometa u centru kotača — da ga ovaj svojim svijetlom ne zabljeskuje.

Vladis Vujnović

Како сам организовао такмичење из математике

Повезао сам се са ученицима II разреда гимназије »Ј. Б. Тито« из Битоле и предложио им да одржимо такмичење у решавању математичких задатака између репрезентација II разреда наших двеју школа.

Ученици II разреда Битолске гимназије су саставили 10 задатака ученицима II разреда Нишке гимназије и послали на моју адресу. Исто тако су ученици II разреда Нишке гимназије послали 10 задатака на адресу Николове Цветанке учен. III разреда гимназије у Битоли.

Задаци су били бодовани тако што је први најтежи бодован са 10 бода, други са 9, трећи са 8, итд. и на крају 10 са 1 бод. Репрезентације су биле од по пет ученика.

На дан 11 I 1959 год. у 8 сати су се скупили такмичари и у својим школама радили задатке под Цветанкиним и мојим надзором. До тада нисмо отварали коверат са задацима, а затим смо им сваком поделили по један примерак постављених задатака. Радило се самостално као писмени задатак. После 4 сата рада покупио сам урађене задатке и послао на адресу Цветанке, а она је покупљене задатке послала на моју адресу.

Када смо прегледали једни другима задатке и обавестили једни друге о успеху такмичење је завршено нерешено. И екипа II разреда Нишке гимназије »Св. Марковић« и екипа II разреда Битолске гимназије »Ј. Б. Тито« су добили по 149 бода.

По решењима се видело да су се неки изразито трудили и показали су добре резултате.

Од ученика Битолске гимназије су се истакле: Најдова Душанка уч. 2. г. (решева и задатке из часописа) са 38 од 55 могућих бода и Сотирова Елена 2. г. са 37 бода. Од ученика Нишке гимназије су се истакли Величковић Драгутин 2_3 са 38 бода и Милић Гордана 2_3 са 34 бода.

Овим примером се могу служити све математичке групе и да на овај начин заказују једни другима такмичење. У свако доба сам спреман да ступим у сарадњу са учеником из било које гимназије, а која жели да се са нама такмичи.

Јеремић Ђурђе,
уч. 3_3 гимназије »Светозар Марковић«, Ниш

NOVE KNJIGE *

Dr. D. Mihailović, *Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru.*

Nolit, Beograd 1958. Matematička biblioteka br. 8. Cena 280·— Din.

Dr. D. S. Mitrinović, *Zbornik matematičkih problema sa prilozima i numeričkim tablicama.* Drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje I. dela.

Nolit, Beograd 1958.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

349. Дат је трапез $ABCD$ чији су углови A и D прави, а чија дијагонала AC је нормална на страни BC.

а) Показати да су троугли ABC и ACD слични. Одатле извести релацију

(1) $$AC^2 = AB \cdot CD.$$

б) Круг, чији је пречник BC, сече AB у E. Испитати природу четвероугла $AECD$ и одатла извести једнакост (1).

в) Дато је $AB = 10\ cm$, $CD = 7{,}5\ cm$; израчунати AC, BC, AD и BD као и углове B и C трапеза.

350. Ако логаритми

$$\log_k x,\ \log_m x,\ \log_n x$$

образују аритметичку прогресију, показати да је

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}.$$

351. Дата је функција

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin x)^{\frac{1}{2}}.$$

а) Доказати идентичност

$$f(\pi - 2x) = 2 - [f(x)]^2.$$

б) Израз $1 - f(x)$ преуредити да се може логаритмовати.

ц) Решити једначину

$$f(x) = f(px)\ \operatorname{cotg} \frac{px}{2}.$$

где је $p > 0$ реални број.

352. Parabola prolazi točkama $A\,(6, -1)$ i $B\,(3, 1)$, dotiče pravac $x + 3y - 2 = 0$, dok joj je os usporedna s osju apscisa.

Nađi jednadžbu te parabole i koordinate točke, u kojoj ona dira zadani pravac.

353. Tetiva elipse prolazi njezinim fokusom F. Dokaži, da je

$$FA \cdot FB = \frac{b^2}{2a}(FA + FB),$$

ako je a velika, a b mala poluos elipse. (Upotrebi polarnu jednadžbu elipse!)

354.* Težišnice trokuta su $9\ cm$, $12\ cm$ i $15\ cm$. Kolika je površina tog trokuta?

355.* Roba poskupi za $p\ \%$. Za koliko procenata treba zatim pojeftiniti pa da se cijena vrati na prvobitnu?

356. Kvadratu stranice a opisana je kružnica. U nastali kružni segment upisan je drugi kvadrat. Kolika je stranica toga manjeg kvadrata?

357. Riješi grafički s pomoću računa derivacija, za koje vrijednosti od m ima jednadžba $(m - 4)x^2 - (m + 14)x + 7m + 8 = 0$ *a*) oba korijena između -3 i 4; *b*) samo jedan korijen između -3 i $+4$. Rezultat provjeri i računski.

358. Ispitaj tok krivulje

$$y = \frac{x^3}{2x + 1}.$$

Odredi grafički, za koje vrijednosti od m ima jednadžba $x^3 - 2mx - m = 0$ *a*) sva tri korijena između -2 i $+4$; *b*) samo 2 korijena između -2 i $+4$.

359. Izračunaj $\int \cos^5 x\,dx$. Piši

$$\cos^5 x = \cos x\,(\cos^2 x)^2.$$

Vidi zadatak 11. i 12. str. 142.

360. U jednadžbi

$$x^2 - 2(m - 1)x - (2m + 1) = 0$$

odredi m tako da bude *a*) zbroj kvadrata korijena minimum, *b*) recipročna vrijednost zbroja kvadrata korijena minimum.

* U ovoj rubrici registriramo svaku knjigu iz područja matematike i fizike, koje se dostavi našoj redakciji.

361. Дат је правоугли троугао ABC (C је теме правог угла). Ако продужимо страну b за a и скратимо a за b ($a > b$), добијамо правоугли троугао A_1B_1C; доказати да је *а)* $c_1 = c\sqrt{2}$, *б)* угао између хипотенуза троугла ABC и троугла A_1B_1C износи $\frac{\pi}{4}$.

362. Збroj dvaju brojeva je s, njihov najmanji zaj. višekratnik je v. Koji su to brojevi? Napose: $s = 78$, $v = 216$.

B) Zadaci iz fizike

171. Masa lifta i tereta, kojim je lift opterećen je 6 tona. Lift se spušta jednolikom brzinom 313 m min^{-1}. Maksimalna napetost užeta smije biti 14.10^3 kp. Kolika je najveća akceleracija, kojom se lift smije zaustaviti? Koliki je najkraći put, na kojem se lift smije zaustaviti?

172. Početna temperatura nekog plina je 20° C. Do koje temperature treba zagrijati taj plin, da bi se srednja brzina njegovih molekula povisila za 20% prema početnoj?

173. Tramvajski vod ima otpor 0,3 oma po km. Jedan tramvaj je udaljen 2 km, a drugi 3 km od ispravljačke stanice, koja ga napaja. Kroz svaki motor prolazi struja od 50 A. Koliki je pad napona na vodu od ispravljačke stanice do drugog tramvaja? Povratni vod (tlo) ima otpor 0.

174. Polumjer zakrivljenosti plankonveskne leće je 118 cm. Ona je položena na planparalelnu ploču. Odozgo je obasjana monohromatskom svjetlošću, koja daje Newtonove kolobare u reflektriranoj svjetlosti. Prvi svjetli kolobar ima polumjer 0,83 mm. Kolika je dužina vala upotrebljene svjetlosti i koliko dioptrija ima plankonveksna leća? Indeks loma stakla je 3/2.

175. Uski snop sunčeve svjetlosti prolazi kroz optičku rešetku, koja ima 8000 crta na 1 cm i stvara spektar prvog reda na zastoru udaljenom 100 cm od rešetke. Kolika je udaljenost između Frauenhoferove C i F linije na zastoru? $\lambda_F = 4861$ Å $\lambda_C = 6563$ Å.

C) Rješenja iz matematike

335. *Дато је*

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}, \quad z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}.$$

Показати да је $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$, *ако су наведени логаритми декадни.*

Земаме логаритам за основа 10,

$$1)\ \log y = \frac{1}{1-\log x}, \quad 2)\ \log z = \frac{1}{1-\log y}.$$

Од 1) заменавиме во 2)

$$\log z = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\log x}} = \frac{1-\log x}{-\log x} \Big| \cdot(-\log x)$$

$$-\log x \log z = 1 - \log x$$
$$\log x (1 - \log z) = 1$$

$$\log x = \frac{1}{1-\log z}, \quad x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}.$$

Мавков Илија, 2 кл. г. »Цв. Димов«, Скопје

336. *Дата су 3 броја a, b и c тако да је $a < b < c$. Који услов мора бити испуњен ако су a, b и c редом m-ти, n-ти и p-ти члан:* а) *аритметичке,* б) *геометриске прогресије?*

а) Бројеве a, b и c можемо овако написати

$$a = a_1 + (m-1)d \quad (1)$$
$$b = a_1 + (n-1)d \quad (2)$$
$$c = a_1 + (p-1)d \quad (3)$$

гдје је a_1 први члан а d диференција прогресије чији су чланови a, b и c.

Ако једнакост (1) одузмемо од друге и треће, па онда те двије разлике подијелимо добићемо послије сређивања:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{n-m}{p-m} \quad \text{или}$$

$$a(n-p) + b(p-m) + c(m-n) = 0.$$

б) Ако су a, b и c чланови геометриске прогресије са првим чланом a_1 и количником q, они се могу изразити помоћу a_1 и q:

$$a = a_1 q^{m-1}$$
$$b = a_1 q^{n-1}$$
$$c = a_1 q^{p-1}$$

Ако другу и трећу једнакост подијелимо са првом добићемо:

$$\frac{a}{b} = q^{n-m} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = q^{p-m}.$$

Ако сад ове двије једнакости логаритмујемо, па подијелимо одговарајуће стране, биће:

$$\frac{\log b - \log a}{\log c - \log a} = \frac{(n-m)\log q}{(p-m)\log q}$$

одакле:

$$(p-m)(\log b - \log a) = (n-m)\log c - \log a)$$

или кад антилогаритмујемо:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{p-m} = \left(\frac{c}{a}\right)^{n-m} \quad \text{или} \quad a^{n-p} \cdot b^{p-m} c = {}^{n-m}.$$

Вујовић Милош, уч. 4_3 р. г. Никшић

337. *Дадена е низата* $a_1, a_2, a_3, \ldots$

а) Најди го a_n *и* a_{n-1}, *ако е даден збирот*

$$S_n = an^2 + bn \qquad (1)$$

каде a *и* b *се две дадени константи.*

Упутство. а) од (1) *се добиеа* S_{n-1} *кога место* n *се стави* $n-1$, *б)* $a_n = S_n - S_{n-1}$.

д) Врз основа на резултатот од а) покажи дека дадената низа претставува аритметичка прогресија, потоа определи го првиот член и разликата a *во зависност од* a *и* b.

а) По упутството

$$S_{n-1} = an^2 - 2an + a + bn - b,$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}, \quad a_n = 2an - a + b,$$
$$a_{n-1} = 2an - 2a - a + b$$

или $$a_{n-1} = 2an - 3a + b.$$

б) За да низата биде аритметичка треба да е испалнето

$$a_{n-1} = \frac{a_n + a_{n-2}}{2}$$

како е $a_{n-2} = 2an - 5a + b$ следува $a_{n-1} = 2an - 3a + b$, од $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ следува

$$an^2 + bn = \frac{n}{2}(a_1 + 2an - a + b)$$

откога ќе се среди равенката се добива

$$a_1 = a + b, \; d = a_n - a_{n-1} \text{ или } d = 2a.$$

Шандуловски Стамат
уч. 8^5 кл. г. »Ј. Б. Тито« Скопје

338. *Кога овој израз*

$$a^4 + a^3 + a^2 + a$$

нема да биде делив со 5?

Ќе га испитаме случаите

1. $a=5k$, 2. $a = 5k + 1$, 3. $a = 5k + 2$, 4. $a = 5k + 3$, $a = 5k + 4$.

1. кога е $a=5k$, изразот е делив со 5
2. кога е $a=5k+1$, изразот не е делив со 5
3. кога е $a=5k+2$, изразот е делив со 5
4. кога е $a=5k+3$, изразот е делив со 5
5. кога е $a=5k+4$, изразот е делив со 5

Значи кога е $a = 5k + 1$ изразот не е делив со 5.

Мавков Илија, 2 кл. г. »Цв. Д.« Скопје

339. *Ако је a realan parametar riješiti i diskutovati jednačinu*

$$(a+1)^2 \sin^2 x - 8(a^2-1)\sin x - 15(a-1)^2 = 0.$$

Pošto je $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, to treba ispitati koliko će stvarnih (između -1 i $+1$) rješenja imati data jednačina.

Jednačina će imati obadva rješenja između -1 i $+1$ ako je

1. $D \geqq 0$; 2. $af(-1) > 0$, 3. $af(+1) > 0$ i 4. i 5. $-1 < \frac{S}{2} < +1$.

1. je ispunjeno, t. j. $D = 31(a^2-1)^2 \geqslant 0$, za sve vrijednosti od a; uvjet 2. $af(-1) = (a+1)^2(-3a+16a-11) > 0$ ispunjen je za

$$\frac{8-\sqrt{31}}{3} < a < \frac{8+\sqrt{31}}{3};$$

3. $af(+1) = (a+1)^2(-11a^2+16a-3) > 0$ ispunjeno je za

$$\frac{8-\sqrt{31}}{11} < a < \frac{8+\sqrt{31}}{11};$$

4. uvjet da je

$$\frac{S}{2} = \frac{4(a^2-1)}{(a+1)^2} > -1, \text{ t. j. } 5a^2 + 2a - 3 > 0$$

ispunjen je, kad je $-\infty < a < -1$ i

$$\frac{3}{5} < a < +\infty; \quad 5. \; \frac{S}{2} = \frac{4(a^2-1)}{(a+1)^2} < 1$$

ispunjen je za $-1 < a < \frac{5}{3}$. Svih pet uvjeta ispunjeno je za

$$\frac{8+\sqrt{31}}{3} < a < \frac{8+\sqrt{31}}{11},$$

ili $$0{,}81075\ldots < a < 1{,}23343\ldots$$

Jednačina će imati samo jedno rješenje između -1 i $+1$ za $f(-1)f(1) < 0$ ili $(-3a^2+16a-11)(-11a^2+16a-3) < 0$, što je ispunjeno za

$$\frac{8-\sqrt{31}}{11} < a < \frac{8-\sqrt{31}}{3}, \text{ i}$$

$$\frac{8+\sqrt{31}}{11} < a < \frac{8+\sqrt{31}}{3}, \text{ t. j.}$$

$$0{,}22111\ldots < a < 0{,}81075\ldots \quad \text{i}$$
$$1{,}23343\ldots < a < 4{,}52258\ldots$$

Za preostale vrijednosti od a, t. j. za

$$-\infty < a < 0{,}22111\ldots$$
$$4{,}52258\ldots < a < +\infty$$

jednačina nema nijedno rješenje između -1 i $+1$ (nema nijedno stvarno rješenje).

Mesihović Behđet, uč. 3^2 g. Mostar

340. *Med dolžinami težišnic in stranicami obstaja relacija*

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaži da obstaja tudi relacija

$$16(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4).$$

Težišnice t_a, t_b, t_c določimo po kosinusovem izreku; kosinus kota naj bo izražen s stranicama trikotnika, torej je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

oziroma:

$$t_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Analogno dobimo t_b^2 in t_c^2:

$$t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

$$t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Če vrednosti za t_a^2, t_b^2 in t_c^2 sešteje mo, dobimo znano relaciju:

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Vrednosti za t_a^2, t_b^2, t_c^2 kvadriramo in sešteje mo:

$$16\,t_a^4 = 4b^4 + 4c^4 + a^4 + 8b^2c^2 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2$$
$$16\,t_b^4 = 4a^4 + 4c^4 + b^4 + 8a^2c^2 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2$$
$$16\,t_c^4 = 4a^4 + 4b^4 + c^4 + 8a^2b^2 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2$$

$$16(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4),$$

kar je bilo dokazati.

Gros Mladen, dij. 4.a r. IV. g. v Ljubljani

341. *S pomoću računa derivacija riješi ove zadatke: a) između svih stožaca iste izvodnice s odredi onaj, kojemu je obujam najveći; b) iz triju dasaka širine a kako bi načinio žlijeb što većeg presjeka.*

a) Ako je visina stošca v, to je

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{\pi v}{3}(s^2 - r^2) = \frac{\pi}{3} v s^2 - \frac{\pi}{3} v^3,$$

$$V' = \frac{\pi}{3} s^2 - \pi v^2 = 0, \quad v = s\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$r^2 = \frac{2}{3} s^2, \quad V'' = -2v\pi \text{ t. j. } < 0.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{27} s^3 \sqrt{3}.$$

b) Presjek je istokračan trapez; ako je gornja baza tog trapeza x, to je

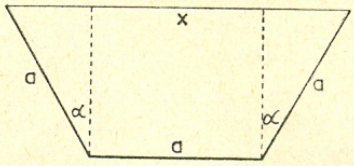
$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax},$$

zato je

$$P = \frac{x + a}{4}\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax},$$

$$P' = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax} + \frac{x + a}{4} \cdot \frac{-x + a}{\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax}} = \frac{2a^2 - x^2 + ax}{2\sqrt{3a^2 - x^2 + 2ax}} = 0,$$

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = -a.$$



Za $x = 2a$ derivacija prelazi od pozitivnih vrijednosti preko nule na negativne, pa se radi o maksimumu. Presjek je dakle najveći, ako je gornja strana žlijeba dvostruke širine od upotrebljene daske. Kut $\alpha = 30°$.

Hendeković Josip, uč. 4b r. 2. g. Zagreb

342. *Neka se odredi položaj broja* -1 *prema korenima jednačine*

$$(m - 6)x^2 - 4x(m - 1) + m - 3 = 0.$$

I. Broj -1 je između korenova ili $x_1 < -1 < x_2$. Mora da postoji uslov $af(-1) < 0$ ili $(m - 6)(m - 6 + 4m - 4 + m - 3) < 0$ ili $(m - 6)(6m - 13) < 0$.

Kako je $a > 0$ i $D > 0$ ta je nejednačina zadovoljena za vrednosti od m unutar korenova, dakle za vrednosti $\frac{13}{6} < m < 6$.

Za te je vrednosti od m broj -1 između korenova jednadžbe

$$(m - 6)x^2 - 4x(m - 1) + m - 3 = 0$$

II. Broj -1 je ispred korenova tj. $-1 < x_1 < x_2$. Moraju postojati uslovi

$$1.\ D \geqq 0, \quad 2.\ af(-1) > 0, \quad 3.\ -1 < -\frac{b}{2a}.$$

1. $D \geqq 0$ za $16(m - 1)^2 - 4(m - 6)(m - 3) \geqq 0$ ili za $3m^2 + m - 14 \geqq 0$, $m_1 = -\frac{7}{3}$, $m_2 = 2$. Poslednja nejednačina je zadovoljena za vrednosti m, koje se nalaze van korenova tj. za $m \leqq -\frac{7}{3}$, $m \geqq 2$.

2. $af(-1) > 0$ ili $(m - 6)(6m - 13) > 0$. Nejednačina je zadovoljena za vrednosti od m van korenova tj. za $m < \frac{13}{6}$, $m > 6$.

3. $-1 < -\frac{b}{2a}$ ili $-1 < \frac{2(m-1)}{m-6}$ ili $\frac{3m - 8}{m - 6} > 0$ ili za $(3m - 8)(m - 6) > 0$, $m_1 = \frac{8}{3}$, $m_2 = 6$. Nejednačina je zadovoljena

za $m < \frac{8}{3}$, $m > 6$. Sva tri uslova zadovoljena su za $-\infty < m < -\frac{7}{3}$, $2 < m < \frac{13}{6}$, $6 < m < \infty$. Za te je vrednosti od m: $-1 < x_1 < x_2$.

III. Broj -1 je iza korena $x_1 < x_2 < -1$. Moraju postojati uslovi 1. $D \geqq 0$, 2. $af(-1) > 0$, 3. $-1 < -\frac{b}{2a}$. Iz prvog uslova izlazi $m \leqq -\frac{7}{3}$, $m \geqq 2$, iz drugog $m < \frac{13}{6}$, $m > 6$, iz trećeg $\frac{8}{3} < m < 6$. Kako su uslovi 2. i 3. protivurečni, broj -1 ne može se nalaziti iza korena x_1 i x_2. Uostalom, to sledi i odatle što u prva 2 slučaja iscrpene sve moguće vrednosti od m.

Ivanović Svetlana, 3. a r. 4. gimn. Sarajevo

Napomena uredništva. Gros Mladen, Kirić Miodrag i Pavlović Vladan dali su i grafičko rješenje tog zadatka; takvo rješenje donosimo na str. 140. 3. primjer.

343. *Dokaži analitično za trikotnik, očrtan paraboli: a) Če se ena stranica premika, se vidi iz žarišča pod stalnim kotom; b) trikotniku očrtan krog gre skozi žarišče; c) ortocenter trikotnika leži na vodnici parabole in konstruiraj žarišče ter vodnico parabole, dane z štirimi tangentam!*

a) Enačba tangente na parabolo je

$$y = kx + \frac{p}{2k} \quad \text{ali} \quad t \equiv k^2x - ky + \frac{p}{2} = 0,$$

kjer je k smerni koeficijent tangente. Koordinati sečišča tangente t s t_1 sta

$$T_1\left(x_1 = \frac{p}{2kk_1},\quad y_1 = \frac{p(k+k_1)}{2kk_1}\right);$$

tangente t s t_2 pa

$$T_2\left(x_2 = \frac{p}{2kk_2},\quad y_2 = \frac{p(k+k_2)}{2kk_2}\right).$$

Spojnici teh dveh točk z žariščem imata enačbi:

$$l_1 \equiv (k_1 + k)x + y(kk_1 - 1) - \frac{p}{2}(k + k_1) = 0$$

$$l_2 \equiv (k_2 + k)x + y(kk_2 - 1) - \frac{p}{2}(k + k_2) = 0$$

kot med njima pa je

$$tg\, l_1 l_2 = \frac{(k_1+k)(kk_2-1)-(k_2+k)(kk_1-1)}{(k_1+k)(k_2+k)+(kk_1-1)(kk_2-1)} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1} = \text{konst.}$$

b) Za kot med tangentama t_1 in t_2 dobimo

$$tg\, t_1 t_2 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 + 1}$$

torej je $tg\, l_1 l_2 + tg\, t_1 t_2 = 0$, oba kota sta suplementarna, od tu pa sledi, da leži žarišče na krogu, očrtanemu trikotniku.

c) Pravokotnica iz T_1 na t_2 ima enačbo:

$$x - k_2 y - \frac{p}{2kk_1}[1 + k_2(k + k_1)] = 0,$$

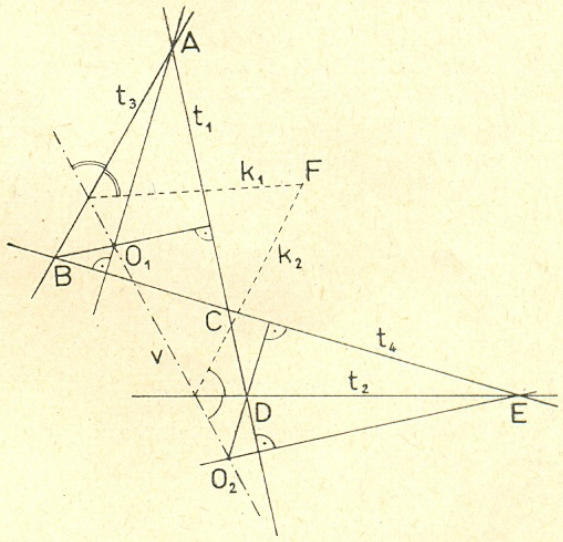
podobno iz T_2 na t_1:

$$x - k_1 y - \frac{p}{2kk_2}[1 + k_1(k + k_2)] = 0$$

če iz teh dveh enačb izračunamo x, dobimo

$$x(k_1 - k_2) + \frac{p}{2k} \cdot k(k_1 - k_2) = 0, \quad x = -\frac{p}{2},$$

torej se ortocenter res nahaja na vodnici.



Konstruiramo ortocentre dveh poljubnih trikotnikov (vidi sliku), zveznica je vodnica. (Na sliki sta O_1 iz $\triangle ABC$ in O_2 iz $\triangle CDE$). Žarišče F dobimo kot sečišče drugih krakov k_1 in k_2 kotov, katerih simetrale sta tangenti t_2 in t_3. Vporabimo pa lahko tudi drugi dvojici tangent na pr. t_1, t_2 in sl.

Janez Lesjak, 3. r. gimn. Kočevje

Napomena uredništva. U zadatku pod *c)* štamparskom griješkom ispao je jedan redak, te točka *c)* treba da glasi: da sjecište visina spomenutog trokuta leži na ravnalici parabole, pa konstruiraj fokus i ravnalicu parabole, kojoj su zadane četiri tangente.

344. *Prave* $p_1 \equiv 2x + 3y - 6 = 0$, $p_2 \equiv x - 4y - 8 = 0$, $p_3 \equiv 3x - y + 9 = 0$ *zatvaraju trougao; nadi jednačinu kruga opisanog*

oko tog trougla, a da ne odrediš koordinate njegovih temena! Za proveru nađi koordinate temena i potvrdi, da zadovoljavaju dobivenu jednačinu kruga.

Napomena: ako su

$f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$,

jednačine triju linija, a k i l kakvigod brojevi, kriva s jednačinom

$$f(x, y) \cdot g(x, y) + kg(x, y)\, h(x, y) + lh(x, y)\, f(x, y) = 0$$

prolazi presecima po dve od one tri linije.

Ako u gornjoj jednačini smenimo jednačine datih prava, dobićemo

$$(2x + 3y - 6)(x - 4y - 8) + k(x - 4y - 8)(3x - y + 9) + l(3x - y + 9)(2x + 3y - 6) = 0.$$

Izmnožimo li i sredimo jednačinu, ona će glasiti:

$$x^2(3k + 6l + 2) + y^2(4k - 3l - 12) + xy(7l - 13k - 5) - x(15k + 22) + y(33l - 28k) - 72k - 54l + 48 = 0. \quad (1)$$

Da bi jedna kriva linija bila krug, koeficijenti uz kvadrate moraju da budu jednaki, a koeficijenat uz proizvod koordinata nula. Znači mora da je:

$$3k + 6l + 2 = 4k - 3l - 12 \quad \text{i} \quad 7l - 13k - 5 = 0$$

Ove jednačine rešimo i dobijemo:

$$k = -\frac{13}{10} \qquad l = -\frac{17}{10}.$$

Ako dobijene vrednosti smenimo u jednačini (1), konačno ćemo dobiti jednačinu traženog kruga:

$$121x^2 + 121y^2 + 25x + 197y - 2334 = 0,$$

čiji centar ima koordinate $\left(-\frac{25}{242}; -\frac{197}{242}\right)$.

Provera: temena trougla leže u tačkama

$$\left(-\frac{21}{11}; \frac{36}{11}\right), \quad \left(\frac{48}{11}; -\frac{10}{11}\right), \quad (-4; -3).$$

Koordinate tih tačaka zadovoljavaju jednačinu nađenog kruga.

Milojković Slobodan,
4_5 VMG »Sv. Marković« Niš

345. *Zadana je jednačina*

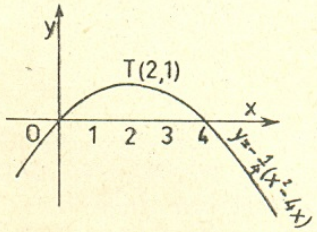
$$u^2 - ux + x - y = 0,$$

gde je u nepoznata, a x i y su koordinate tačke M u ravni. Na kojoj se krivoj nalazi tačka, ako jednačina ima a) dvostruki koren; b) proizvod oba korena jednak 1; c) zbir oba korena jednak 2; d) u kojem se području ravni mora nalaziti tačka M, da su oba korena realna i različita; e) da proizvod oba korena realan i veći od 1?; f) da je zbir korena realan i veći od 2?

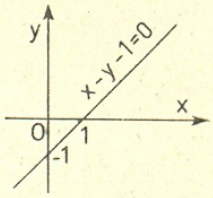
a) Jednačina ima dvostruki koren, ako je

$$D = 0 \text{ odnosno } x^2 - 4(x - y) = 0.$$

Prema tome tačka M će se nalaziti na paraboli koja seče x-osu u tačkama 0 (0,0) i P (4,0); zatim ima maksimum u tački T (2,1), vidi sliku a).



Sl. a



Sl. b

b) Ako je proizvod korena jednak 1, onda je

$$x - y = 1,$$

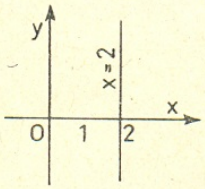
prema tome tačka M će se nalaziti na pravoj koja ide tačkama A (1,0) i B (0, —1). Vidi sl. b).

c) Zbir korena jednak 2, odnosno $x = 2$. Tačka M se nalazi na pravoj koja je paralelna sa y-osom na rastojanju 2. To je osa gornje parabole. Vidi sl. c).

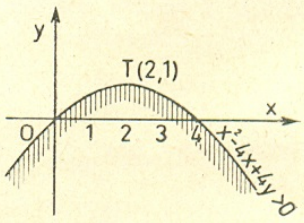
d) Da koreni budu realni i različiti mora biti $D > 0$, odnosno

$$x^2 - 4(x - y) > 0.$$

Tačka M će se nalaziti izvan krive parabole opisane pod *a*).



Sl. c



Sl. d

e) Ako je proizvod korena realan i veći od 1, onda je

$$x - y > 1 \quad \text{ili} \quad x - y - 1 > 0$$

i ujedno $x^2 - 4(x - y) > 0$. Tačka M će se nalaziti nadesno prave opisane pod *b*) i ujedno izvan krive parabole $x^2 - 4x + 4y = 0$ (sl. *d*) pa se može neposredno odrediti oblast gde se nalaze sve tačke koje zadovoljavaju uslovu *e*).

f) Ako je zbir oba korena realan i veći od 2, onda je $x > 2$ i opet $x^2 - 4x + 4y > 0$. Tačka M će se nalaziti nadesno prave (sl. *c*)

i ujedno izvan krive (sl. *d*) pa se opet može lako odrediti oblast gde se nalaze tačke koje zadovoljavaju uslovu *f*).

Jevrosima Stanojević
vanr. uč. 4. r. g. »S. M«, Niš

346. *Odredi najmanji broj, koji podijeljen s 2 daje ostatak 1, podijeljen s 3 daje ostatak 2, podijeljen s 4 daje ostatak 3 i t. d. i najzad, podijeljen s 10 daje ostatak 9.*

Nepoznati broj x podijeljen redom s 2, 3, . . . , 10 daje ostatak za 1 manji od divizora: 1, 2, . . . , 9, što znači da će taj broj uvećan za 1, t. j. $x + 1$ biti najmanji zajednički sadržatelj brojeva 2, 3, 4, . . . , 10. Dakle

$$x + 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{ili}$$
$$x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 2519.$$

Mesiković Behdet, 3$_2$ r. g. Mostar

347. *Dokaži, da je vrijednost izraza*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

jednaka 4.

a) $$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$
$$20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} +$$
$$+ 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})^2 (20 - 14\sqrt{2})} +$$
$$+ 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})^2} = 64$$
$$\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})}\ (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} +$$
$$+ \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}) = 8$$
$$\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})} \cdot 4 = 8 \ / : 4$$

in kubirano

$$(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2}) = 8$$
$$400 - 392 = 8$$
$$8 = 8$$

Ivan Cankar, 3. r. g. Škofja Loka

б) Израз можемо овако написати:

$$\sqrt[3]{8 + 12 + 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} +$$
$$+ \sqrt[3]{8 + 12 - 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} \quad \text{или}$$
$$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}$$

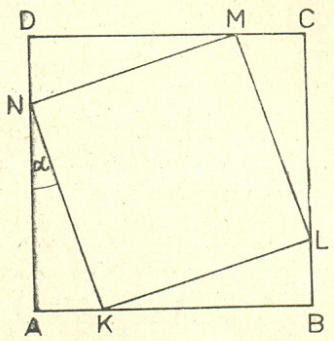
одакле следује

$$2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

Вујошић Милош, 4$_3$ р. г. Никшић

348. *U kvadrat je upisan kvadrat. Omjer površina tih kvadrata je* 3 : 2. *Koliki je kut između stranice većeg i stranice manjeg kvadrata?*

Stranica većega kvadrata je $AB = a_1$, manjšega pa $KL = a_2$. Torej velja razmerje: $a_1^2 : a_2^2 = 3 : 2$, oziroma $a_1^2 = 1{,}5\, a_2^2$. Ploščina večjega kvadrata $ABCD$ je vsota ploščine manjšega kvadrata $KLMN$ in 4 pravokotnih trikotnikov, ki leže med obema kvadratoma. Velja enačba:



$$a_1^2 = a_2^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a_2^2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

oziroma

$$1{,}5\, a_2^2 = a_2^2 + 2 a_2^2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$2 \sin\alpha \cos\alpha = 0{,}5$$
$$\sin 2\alpha = 0{,}5$$
$$2\alpha = 30°.$$

Kot med stranicama obeh kvadratov je 15°, oziroma 90° — 15° = 75°.

Gros Mladen, 4.a r. 4. g. Ljubljana

Riješili zadatke iz 2. broja

Abdurahmanović Halid, 2. r. geodet. STŠ, Sarajevo, 335, 337, 347, 348; *Andrić Pero*, 2a r. g. Visoko, 338, 347; *Bajtarević Ahmed*, 4. r. g. Visoko, sve zadatke; *Bevk Jože*, dij. 2a r. 4. gim. Ljubljana, 338, 346, 347, 348; *Berković Ivan*, uč. 4a r. g. Vukovar, 335, 340, 341, 348; *Bodlović Petar*, 4. razr. 1. gimn. Zagreb, sve zadatke; *Cankar Ivan*, 3. r. g. Škofja Loka, 335, 338, 347; *Dvizac Menail*, 3. Am STŠ, Mostar, 335, 337, 338, 339, 340, 342, 344, 345, 348; *Gros Mladen*, dij. 4a r. 4. gim. Ljubljana, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 344, 345, 346, 347, 348, ujedno 331. zadatak što je prošli put štamparskom griješkom bilo izostavljeno; *Grgić Josip*, 4a razred gim. Nova Gradiška, 335, 336, 339 (djel.), 347; *Hendeković Josip*, 4b r. 2. g. Zagreb, 335, 336, 337, 338, 339, 340,

341, 342, 344, 345, 346, 347, 348; *Imamović Munever*, 2a r. g. Gradačac, 338, 346, 348; *Ivanović Svetlana*, 3a r. 4. g. Sarajevo, 335, 339, 342, 347; *Kirigin Janko*, 2a r. 1. gim. Zagreb, 338; *Kovač Antal*, 4b r. g. Sombor, 335, 336, 337, 338, 340, 346, 347, 348; *Kovačina Marko*, 3_2 r. g. Mostar, 337; *Lautar Franc*, 2a r. g. Kočevje, 335, 338, 341a, 348; *Lenasi Rado*, 2b r. 1. gim. Celje, 347, 348; *Lesjak Janez*, dij. 3. r. g. Kočevje, sve zadatke; *Lojen Miroslav*, uč. 4c r. gim. Varaždin, sve zadatke; *Maček Vilko*. dij. 2b r. 4. g. Ljubljana, 335, 338, 341, 346, 347, 348; *Mesiković Behđed*, 3_2 r. g. Mostar, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 344, 345, 346, 347, 348; *Milojković Slobodan*, 4_5 r. g. »Sv. Mark.«, Niš, 335, 337, 339, 344, 347, 348; *Moser Josip*, uč. 3a r. g. »O. Nikolov«, Skopje, 335, 336, 337, 338, 340, 347, 348; *Paar Vladimir*, 2a r. 5. gim. Zagreb, 335, 338, 340, 348; *Pančetović M. Dragoslav*, 4_4 r. g. »Sv. Mark.«, Niš, 335, 348; *Prelević Radmila*, 2b r. gim. Titograd, 335; *Prinož Bradač*, dij. 2b r. 1. g. Ljubljana, 335, 338, 347; *Rind Ištvan*, 4b r. gim. »Moše Pijade«, Subotica, 336, 337, 339, 340, 347, 348; *Stanojević Jevrosima*, 4. r. g. »Sv. Mark.«, Niš, 335, 336, 337, 340, 345, 347, 348; *Stavrić Ratko*, uč. 4a r. g. Ohrid, 335, 337, 345, 347; *Tržec Đuro*, 4a r. gim. Bjelovar, 335, 337, 340, 348; *Bogdanov Lazar*, 2_1 p. 8. beogr. r. 335, 336; *Vujović Milosa*, 4_3 p. r. Nikšić, 335, 337, 338, 339, 341, 346, 347, 348; *Gvozdić Stevan*, uč. 2a p. r. Vršac, 347; *Gogić Svetozar*, 4_2 p. r. »Ct. Cerović«, Nikšić, 338, 339 (del.), 347, 348; *Димитров Ристо*, уч. 4b р. г. Охрид, 348; *Ђурић Г. Зоран*, уч. 4. р. г. Чачак, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 344, 345, 346, 347, 348; *Зеленовић Илија*, 4. р. гим. Коњиц, 335; *Јеремић Ђурђе*, 3_3 р. г. »Св. Марк.«, Ниш, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 345, 346, 347, 348; *Јовановић Добривоје*, 4_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 336, 337, 338, 339 (дел.); *Константиновић Ђ. Милован*, 4_1 р. г. Ћуприја, 335, 348; *Кирић Миодраг*, 7_3 р. г. Зрењанин, 339, 342; *Летић Милан*, 4е р. г. »М. Пијаде«, Суботица, 335, 337, 338, 339, 345, 347, 348; *Мавков Илија*, 2. кл. г. »Цв. Димов«, Скопје, 335, 338, 345, 348; *Мандуловски Стачат*, 4b кл. г. »Ј. Б. Тито«, Скопје, 335, 337, 338, 345; *Марковић Радомир*, 4_1 р. г. Ћуприја, 335, 337, 338, 347, 348; *Милашиновић Слободан*, 3_2 р. г. См. Паланка, 335, 337, 338, 340, 342, 346, 348; *Милетић Драгиша*, 8_2 р. г. Алексинац, 335, 337, 338, 347, 348; *Милосављевић Боривоје*, 3. р. г. Ћуприја, 339 (дел.); *Милојковић Слободан*, 4_5 р. гим. »Св. Марк.«, Ниш, 338, 339, 347, 348; *Миић Мирко*, 4_5 р. гим. »Св. Марк.«, Ниш, 335, 336, 337, 345, 347; *Момиров Дејан*, 1_3 р. 1. г. Зрењанин, 338; *Мркић Мило*, 4_3 р. гим. »Ст. Церовић«, Никшић, 335, 336, 337, 345; *Најдова Душанка*, 2. кл. гим. Битола, 340, 346, 347, 348; *Николовски Тихомир*, 4. р. кл. г. »Ј. Б. Тито«, Битола, 335, 336, 337, 338, 340, 342, 347, 348; *Новак Деделевић*, гео. 1 СТШ, Титоград, 338, 348; *Новаковић Тихомир*, 4_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 337, 344, 347, 348 (дел.); *Обрадовић Душан* 14 беогр. гимн. 335, 337, 345, 347, 348; *Павићевић Вјера*, 3_3 р. г. »Ст. Церовић«, Никшић, 335, 338, 347; *Павићевић С. Момир*, уч. 4. р. г. См. Паланка, 335, 336, 337, 339, 340, 344, 347, 348; *Павловић Владан*, уч. 4_3 р. гим. Светозарево, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 344, 345, 346, 348; *Радовановић Нинослав*, 4_1 р. гим. »Ст. Сремац«, Ниш, 336, 337, 339, 348; *Радовановић Родољуб*, 3b р. 1. зем. г. 338, 347, 348; *Секулић Божидар*, 4_1 р. г. Смедерево, 335, 337; *Стојановски Слободанка*, 3а кл. г. »Г. Делчев«, Куманово, 335; *Ћирић Слободан*, 3_4 р. гим. »Ст. Церовић«, Никшић, 335, 345, 346; *Цвијевић Вукосав*, 3. р. 1. г. Крагујевац, 340, 348; *Чабаркапа Томислав*, 4. р. гим. Плевља, 346, 348; *Шумић М. Томислав*, уч. 4. р. гим. Чачак, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 344, 345, 346, 347, 348.

D) Rješenja zadataka iz fizike

166. *Brzi vlak giba se brzinom $v = 90$ km sat^{-1}. Kočenjem se zaustavi na putu $s = 150$ metara. Koliki kut α sa horizontalnom ravninom zatvara površina vode u tenderu lokomotive na tom dijelu gibanja vlaka?*

Negativni pospešek a vlaka, ki se giblje s hitrostjo $v = 90$ km m$^{-1} = 25$ m s^{-1} in se ustavi po $s = 150$ m je

$$a = \frac{v^2}{2s} = 2{,}083 \text{ m s}^{-2}.$$

Na vodo v tenderju delujeta dve sili: sila težnosti G in sila vztrajnosti F, ki se pojavi z zaviranjem. Vodna gladina, ki je vedno pravokotna na rezultanto sil bo tudi v tem primeru pravokotna na rezultanti R obel sil. Torej bo kot α med rezultanto in gravitacijsko komponento enak naklonskemu kotu gladine, ker sta kota normalna:

$$tg\,\alpha = \frac{F}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{2{,}083}{9{,}81}.$$

Naklonski kot gladine je

$$\alpha \approx 12°.$$

Gros Mladen, 4.a r. 4. g. Ljubljana

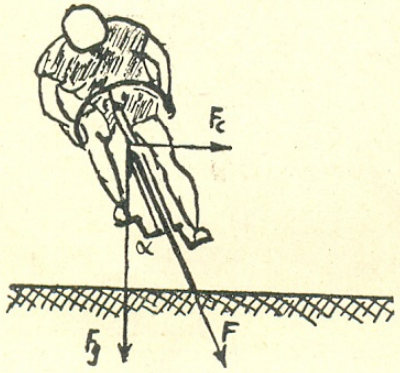
167. *Kolikom maksimalnom brzinom v motociklista može voziti po horizontalnoj cesti, koja zakreće s polumjerom $r = 70$ m, ako je koeficijent trenja kotača i ceste μ jednak 0,3? Za koliki je kut α motociklista nagnut kod te brzine prema vertikalnoj ravnini?*

Največja hitrost motorista, pri koteri ne pade, je tista, pri koteri je centrifugalna sila F_c enaka sili trenja F_{tr}.

$$F_c = F_{tr}. \qquad (1)$$

Se veda da je koeficijent trenja

$$\mu = \frac{F_{tr}}{Fg}. \qquad (2)$$



Ker iščemo maksimalna hitrost, pri koteri je centrifugalna sila enaka sili trenja, vstavimo v enačb (2) F_c namesto F_{tr}

$$\mu = \frac{F_c}{Fg} = \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{rg\mu} = \sqrt{210\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}} = \underline{14{,}5\ \mathrm{m\ s^{-1}}}.$$

Maksimalna hitrost motorista je 14,5 m s^{-1},

$$tg\,\alpha = \frac{F_c}{Fg} = \mu = 0{,}3$$

$$\alpha = 16°\,40'.$$

Pri brzini $v = 14{,}5$ m s^{-1} je motorist nagnjen za 16° 40′ proti vertikalni ravnini.

Loutar Franc, 2.a r. g. Kočevje

168. *Koliku brzinu mora imati olovna kugla, da bi se rastalila, kada udari u željeznu ploču? Zadano: temperatura okoline $t_1 = 27°$ C, temperatura tališta olova $t_2 = 327°$ C, toplina taljenja olova je 5 cal, specifična toplina olova $c = 0{,}03$ cal g^{-1} st^{-1}.*

Ko bo krogla udarila od ploščo, se bo njena kinetička energija spremenila v toplotno. Da bi se ob udarcu krogla stopila, mora kinetička energija E biti tolišna, da bo lahko iz nje nastala toplotna količina Q krogło najprej do tališča segrela in nato stalila.

Torej

$$IQ = E \qquad (I = 4{,}128\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}\ k\ cal^{-1}})$$

$$I\,[mc\,(t_2 - t_1) + mc'] = \frac{mv^2}{2}$$

$$4.128\,[m \cdot 0{,}03\,(327 - 27) + m \cdot 5] = \frac{mv^2}{2}.$$

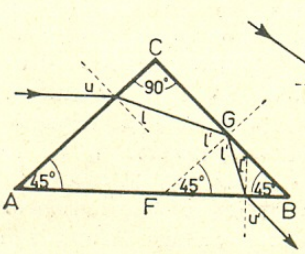
Iz zadnje enačbe dobimo najmanjšo hitrost v, pri koteri se krogla še stopi:

$$v = \sqrt{2\,I\,\frac{Q}{m}} = \underline{340\ \mathrm{m\ s^{-1}}}.$$

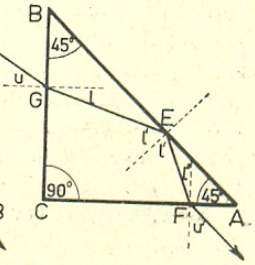
Gros Mladen, 4.a r. 4. g. Ljubljana

169. *Pravokutna istokračna prizma načinjena je od stakla indeksa loma $n = 1{,}54$. Koliki je kut devijacije zrake, koja pada na katetnu plohu prizme paralelno s hipotenuznom plohom, ako je a) kut prizme 90°, b) kut prizme 45°?*

a) Iz zakona loma $\frac{\sin n}{\sin l} = n$ izlazi, da je $\sin l = \sin 45° \cdot 1{,}54$, t. j. $l = 27°\,20'$. Iz slike *a)* vidimo, da je $l' = 90 - l = 62°\,40'$. Budući je l' veći od graničnog kuta ($n \sin l' > 1$), u točki G se zraka totalno reflektira i pada na plohu AB pod kutom l''. Iz trokuta GEF izlazi, da je $90° - l'' = 180° - l' - 45°$, dakle je $l'' = l' - 45° = 17°\,40'$, a prema zakonu loma $\frac{\sin n'}{\sin l'} = n$, kut n', pod kojim zraka izlazi iz plohe AB jest $n' = 27°\,52'$.



Sl. a



Sl. b

Kut devijacije δ možemo naći ovakvim zaključivanjem: zraka se na plohi AC otkloni za $n - l$, na plohi CB za $180° - n'$ na istu stranu, a na plohi AB za kut $n' - l''$ na protivnu straou. Dakle je

$$\delta = (n - l) + (180° - n') - (n' - l'') = \underline{62°\,8'}.$$

b) Iz zakona loma, kao u slučaju a) i tu je kut $l = 27°\,20'$. Iz trokuta GBE (sl. *b*) izlazi, da je $l' = A + l = 72°\,20'$. Na plohi AB dolazi do totalne refleksije, jer je $n \sin l' > 1$. Zraka nakon refleksije pada na plohu AC pod

kutom l''. Zbog sličnosti trokuta GEB i EFA, $l'' = l$, pa je $n' = n$, a iz toga slijedi da je devijacija zrake

$$\delta = 0°.$$

170. *Napon između dviju paralelnih ploča smještenih u vakuumu jest $V = 2\,700$ V. Kojom brzinom v stigne elektron na pozitivnu ploču, ako pođe neznatnom brzinom s negativne ploče? — Masa elektrona m je $9{,}1.10^{-28}$ g, naboj elektrona e je $4{,}8.10^{-10}$ el. st. c. g. s.*

Prije polaska elektron ima potencijalnu energiju $e \cdot V$. Na kraju se ona pretvori u kinetičku t. j.

$$\frac{mv^2}{2} = E, \quad \frac{mv^2}{2} = eV, \quad V = 9 \text{ el. st. c. g. s.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}32 \cdot 10^{-9}}{9{,}1 \cdot 10^{-28}}} =$$

$$= \sqrt{9{,}5 \cdot 10^{18}} = 3{,}1 \cdot 10^{9} \text{ cm sek}^{-1}.$$

Elektron bi dakle postigao oko $\frac{1}{10}$ brzine svjetlosti.

Bodlović Petar, uč. 4a r. 1. g., Zagreb

Riješili zadatke iz 2. broja

Bodlović Petar, 4a r. 1. g. Zagreb, 166, 167, 168, 169, 170; *Dvizac Menail*, 3 Am STŠ, Mostar, 166, 167; *Gotalo Boško*, 7. r. g. Foča, 168 (djel.); *Gros Mladen*, 4a r. 4. g. Ljubljana, 166, 167, 168, 169 (djel.), 170; *Hussu Alojz*, 4c r. g. Celje, 166 (djel.), 167, 168, 169, 170; *Lesjak Janez*, 3. r. g. Kočevje, 166, 167, 168, 170; *Loutar Franc*, 2a r. g. Kočevje, 167; *Moser Josip*, 7a r. g. »O. Nikolov«, Skopje, 166, 167, 168; *Вујовић Милош*, 4_3 p. r. Никшић, 166, 167, 168 (дел.), 170; *Јеремић Ђурђе*, 3_3 p. r. »Св. Марк.«, Ниш, 169; *Микетић Драгиша*, 4_2 p. r. Алексинац, 170; *Миловановић Боривој*, 7_2 p. r. Ћуприја, 166 (дел.), 167; *Новаковић Тихомир*, 4_2 p. r. »Ст. Сремац«, Ниш, 170 (дел.); *Павићевић Вера*, 3_3 p. r. Никшић, 166, 167.

Vježbe za učenike gimnazija i srednjih stručnih škola

Prvi elementi infinitezimalnog računa

7. Proučavanje toka funkcije pomoću derivacija.

Derivacija neke funkcije može nam zgodno poslužiti da proučimo tok te funkcije. Kako se to radi, pokazat ćemo na nekim primjerima.

1. *Tok kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$.*

Načinimo derivaciju $y' = 2ax + b$; ona se poništava za $x = -{}^{b}/_{2a}$; ako je $a > 0$, derivacija prelazi od negativnih vrijednosti preko nule na pozitivne, ako je $a < 0$, ona prelazi od pozitivnih vrijednosti na negativne.

Dakle, ako je $a > 0$ za $x = -{}^{b}/_{2a}$ kvadratna funkcija poprima minimum, a ako je $a < 0$, za $x = -{}^{b}/_{2a}$ ona poprima maksimum. Isto izlazi i iz $y'' = a$. Vrijednost minimuma odnosno maksimuma dobiva se, da se $x = -{}^{b}/_{2a}$ stavi u $y = ax^2 + bx + c$, pa izlazi vrijednost $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

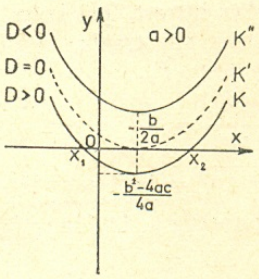
Tok neke funkcije predočujemo u obliku tablice; za kvadratnu funkciju imamo:

1. $a > 0$

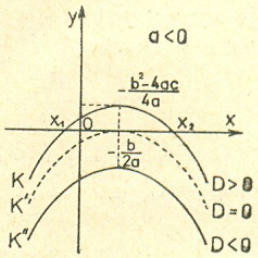
x	$-\infty$		$-{}^{b}/_{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $a < 0$

x	$-\infty$		$-{}^{b}/_{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



Sl. 1.



Sl. 2.

2. *Tok bikvadratne funkcije $y = ax^4 + bx^2 + c$.*

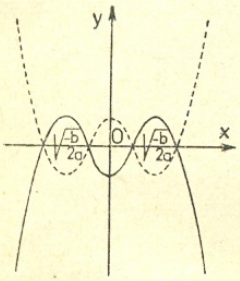
Nalazimo $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; y' se poništava za $x = 0$ i za $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Posljednje dvije vrijednosti jesu realne, ako je $-\frac{b}{a} < 0$ t. j. ako su a i b protivna znaka. Kako je $y = x^4\left(a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^4}\right)$, izlazi da $y \to \pm\infty$ i znaka je od a. Razmatramo ove slučajeve:

1. $a < 0,\ b > 0$

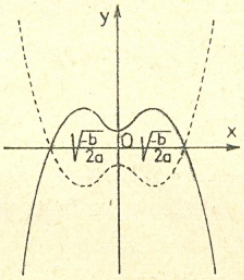
x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$
			maks.		*min.*		*maks.*		

2. $a > 0,\ b < 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
			min.		*maks.*		*min.*		



Sl. 3.



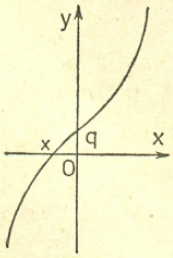
Sl. 4.

Slike 3 i 4 nam predočuju tok bikvadratne funkcije, izvučene krivulje odgovaraju prvom slučaju, iscrtkane drugom. Ako su sva 4 korijena realna, imamo prvu sliku, ako su samo 2 realna, imamo drugu sliku. Učenik neka sam nacrta sliku, koja odgovara slučaju, gdje su sva 4 korijena kompleksna.

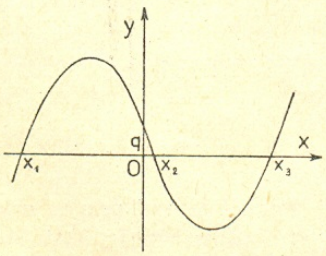
Ako su a i b jednako označeni, derivacija se poništava samo za $x = 0$; za $x = 0$ imamo minimum c, ako su a i $b > 0$, a maksimum c, ako su a i $b < 0$.

3. *Tok kubne funkcije* $y = x^3 + px + q$.

Derivacija $y' = 3x^2 + p$. Treba razlikovati 2 slučaja, već prema tomu da li je $p > 0$ ili je $p < 0$.



Sl. 5.



Sl. 6.

a) $p > 0$, y' je uvijek pozitivno, funkcija uvijek raste; za $x \to -\infty$, $y \to -\infty$, za $x \to \infty$, $y \to \infty$, funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$ i prema tomu ona siječe samo jedamput os x i ima jedan jedini realni korijen. Sl. 5. nam predočuje tu funkciju.

b) $p < 0$, $y' = 0$ za $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ i $x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$, tok funkcije izlazi iz tablice:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$\searrow$	$q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$
			maks.		*min.*		

Vidi sl. 6.

Proučavajući tok kubne funkcije za $p < 0$ možemo odmah odgovoriti na pitanje, koji uvjet mora biti ispunjen da kubna funkcija $x^3 + px + q$ ima sva 3 korijena realna. Mora biti maksimum pozitivan i minimum negativan t. j. produkt maksimuma i minimuma mora biti negativan. Dakle

$$\left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$$

ili

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Uvjet $p < 0$ već je sadržan u uvjetu

$$27q^2 + 4p^3 < 0,$$

pa je dovoljno da budu sva tri korijena realna da bude $27q^2 + 4p^3 < 0$. To je *kubna diskriminanta*.

4. Funkcija $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$.

Ta je funkcija neprekidna za svako x osim za one x, koji poništavaju nazivnik $dx^2 + ex + f$. Da se ispita tok te funkcije, odredit će se vrijednosti od x, za koje je $dx^2 + ex + f = 0$ t. j. za koje je funkcija beskonačno velika kao i vrijednosti, za koje se poništava derivacija.

Treba ispitati također, kojoj vrijednosti teži y za $x \to \pm\infty$. Krivulje mogu poprimiti različite oblike; mi ćemo razmatrati samo nekoliko slučajeva.

a) Ispitaj tok funkcije $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$.

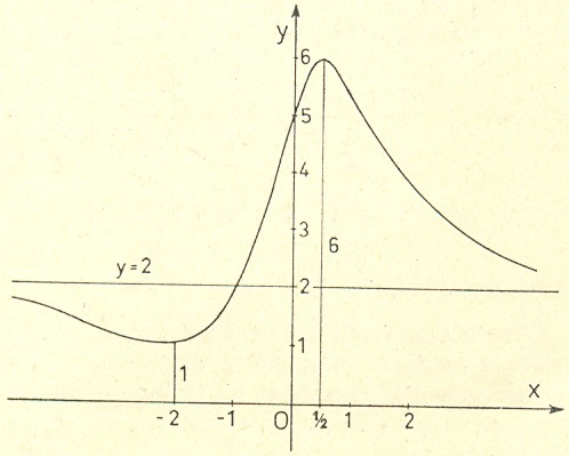
$$y' = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 1)^2},$$

$$y' = 0 \text{ za } x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Načinimo tablicu

x	-0		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	2
			min.		*maks.*		

Slika 7. nam predočuje tu funkciju.



Sl. 7.

b) Ispitaj tok funkcije $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 8}$.

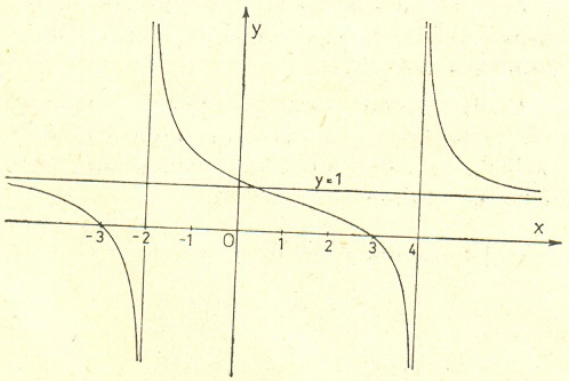
$$y' = \frac{-2x^2 + 2x - 18}{(x^2 - 2x - 8)^2}.$$

Kako y' nema realnih korijena, y' je uvijek negativno, y uvijek pada, pa nema ekstremnih vrijednosti. Korijeni su nazivnika $x_1 = -2$, $x_2 = 4$; za te je vrijednosti y prekidno i skače od $-\infty$ na $+\infty$.

Tok funkcije razabira se iz tablice

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	1

Slika 8. nam predočuje tu funkciju.



Sl. 8.

Kao 3. primjer toka ovih funkcija riješit ćemo grafički zadatak 342: neka se ispita položaj broja -1 prema korijenima jednadžbe

$$(m - 6)x^2 - 4(m - 1)x + m - 3 = 0,$$

kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

Riješimo tu jednadžbu po m; izlazi

$$m = \frac{6x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 1},$$

pa predočimo tu krivulju u koordinatnom sistemu (x, m). Načinimo

$$m' = \frac{-20x^2 + 6x + 8}{(x^2 - 4x + 1)^2},$$

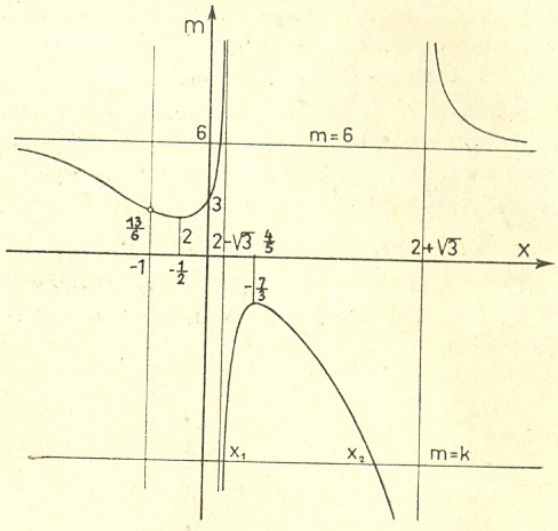
$$m' = 0 \quad \text{za} \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

Za $x_1 = -\frac{1}{2}$ derivacija prelazi iz negativne vrijednosti na pozitivne, imamo minimum jednak 2, za $x = \frac{4}{5}$ imamo maksimum $-\frac{7}{3}$. Funkcija je beskonačno velika za $x = 2 - \sqrt{3}$, $x = 2 + \sqrt{3}$.

Možemo načiniti tablicu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$2-\sqrt{3}$		$\frac{4}{5}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$-\frac{7}{3}$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	6

Nacrtamo li tu krivulju, dobivamo sl. 9.



Sl. 9.

Povucimo sad pravac $m = k$, gdje k može poprimiti sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$ i gledajmo sjecišta tog pravca s krivuljom.

Apscise tih sjecišta jesu korijeni jednadžbe za pripadno m. Svi se rezultati diskusije razabiru neposredno iz slike.

8. Pojam diferencijala.

Neka je $y = f(x)$ derivabilna funkcija u intervalu (a, b). Kako je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad \text{to je}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0 \text{ za } \Delta x \to 0)$$

ili $$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x.$$

Prirast Δy sastoji se od dva pribrojnika; osobito je važan prvi pribrojnik $f'(x)\,\Delta x$; on se zove *diferencijal funkcije* y i označuje se s dy, te je

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Ova definicija diferencijala vrijedi za sve oblike funkcije $f(x)$, ona vrijedi i za $f(x) = x$; u tom je slučaju $y' = 1$, pa je $dx = \Delta x$. Tako dobivamo konačno

$$dy = y'\,dx.$$

Diferencijal funkcije $f(x)$ jednak je produktu derivacije funkcije i diferencijala nezavisne varijable. Odatle izlazi dalje, da je derivacija funkcije jednaka kvocijentu od diferencijala funkcije i diferencijala nezavisne varijable, t. j.

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Na pr. diferencijal od $y = x^3$ jest $dy = 3x^2\,dx$, od $y = \cos x$ jest $dy = -\sin x\,dx$.

9. Pojam neodređenog integrala.

Vidjeli smo, kako se izračunava derivacija neke funkcije $f(x)$; sad treba da riješimo obrnuti zadatak: iz poznate derivacije neke funkcije treba da odredimo samu tu funkciju. Ako je poznata derivacija $\varphi(x)$, koja je to funkcija $f(x)$, od koje je derivacija $\varphi(x)$? Ili također: poznat je diferencijal neke funkcije $f(x)$ t. j. $df(x) = \varphi(x)\,dx$, koja je to funkcija $f(x)$?

Računski postupak, kojim se od poznate derivacije odnosno poznatog diferencijala neke funkcije određuje sama funkcija, zove se *integriranje*. Ako je na pr. zadan diferencijal $2x\,dx$, to je integral toga diferencijala x^2, jer je $dx^2 = 2x\,dx$. To označujemo

$$\int 2x\,dx = x^2.$$

Ali ako je $f(x)$ integral diferencijala $\varphi(x)\,dx$, to je i $f(x) + c$, gdje je c bilo koja konstanta, također integral tog diferencijala, jer je i derivacija od $f(x) + c$ također jednaka $\varphi(x)$.

Također pišemo dakle

$$\int 2x\,dx = x^2 + c.$$

C se zove integraciona konstanta ili konstanta integracije. Kako se njezina vrijednost može uzeti po volji, integral se zove neodređeni.

Neodređeni integral nekih diferencijala možemo odmah napisati:

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c,$$

jer je derivacija te funkcije jednaka x^m.

Ova formula vrijedi za sve x, ako je m prirodan broj, također za sve $x \neq 0$, ako je m cio negativan broj izuzevši $m = -1$ te za $x > 0$, ako je m realan broj po volji.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

jer je derivacija od $\sin x + c$ jednaka $\cos x$,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

Integral zbroja i umnoška sa stalnim faktorom.

Neka su $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ zadane funkcije od x; stavimo li $y = \varphi(x) + \psi(x)$, neodređen integral diferencijala $y\,dx$ bit će

$$\int y\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx,$$

jer obje te strane imaju jednaki diferencijal i objema se stranama može dodati konstanta po volji. To znači, *zbroj se integrira, da se svaki pribrojnik integrira i dobiveni integrali zbroje.*

Slično se dokazuje, da je

$$\int a\,\varphi(x)\,dx = a \int \varphi(x)\,dx.$$

Primjer 1.

$$\int (3x^3 - 5x^2 + 6x - 4) =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{6x^2}{2} - 4x + c.$$

2. $$\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx =$$

$$\int \left(x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-3} - 5x^{-\frac{3}{4}} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 12x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^{-2} - 20x^{\frac{1}{4}} + c.$$

3. $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x\,dx}{2} =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

4. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)\,dx}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c,$

jer je

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + c.$$

5. $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx = \int \sin x\,dx - \int \sin x \cos^2 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c.$

Vježbe

Ispitaj tok ovih funkcija:

1. $y = x^4 - 8x^2 + 9$ [za $x = 0$, $M = 9$, za $x = \pm 2$, $m = -7$].
2. $y = -x^4 + 2x^2 + 8$ [za $x = 0$, $m = 8$, za $x = \pm 1$, $M = 9$].
3. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} - \frac{7}{6}x + \frac{8}{3}$ $\left[\text{za } x = -\frac{7}{3},\ M = \frac{412}{81},\ \text{za } x = 1,\ m = 2\right]$.
4. $y = \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-1}$ [funkcija uvijek pada, nema ni M ni m].
5. $y = \frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ [za $x = -1$, $M = \frac{7}{3}$, za $x = 1$, $m = -3$].
6. $y = \frac{x^4-x^2+2}{x^4+2x^2+1}$ [za $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, za $m = \frac{7}{16}$, za $x = 0$, $M = 2$, za $x \to \infty$, $y \to 1$].

Izračunaj ove neodređene integrale:

7. $\int (\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^3})\,dx = \int (x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{3}{4}})\,dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c.$

8. $\int (3\sin x \cos x + \cos^2 x)\,dx = \int \left(\frac{3}{2}\sin 2x + \cos^2 x\right)dx = -\frac{3}{4}\cos 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$

9. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x)\,dx = \int \left[\cos 2x + \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\right]dx = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right) + c = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c.$

10. $\int tg^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = tg\,x - x + c.$

11. $\int \cos 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

12. $\int \sin^4 x\,dx = (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$

13. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx = \int (1+\sin x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + c.$

14. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = -ctg\,\frac{x}{2} + c.$

15. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = tg\,\frac{x}{2} + c.$

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = tg\,x - ctg\,x + c.$

17. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}\,dx = \int \sin x\,dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cos x - ctg\,x + c.$

Zadaci na ispitu zrelosti u škol. godini 1957./58.

1. Zbroj od tri broja, koji čine rastući aritmetički niz, iznosi $3k$, gdje je k pozitivan cio broj (specijalno $k = 25$). Ako se drugom doda $\frac{k}{5}$, a trećem k, niz prelazi u geometrijski. Kako glasi aritmetički niz? Koliko članova niza treba zbrojiti, da njihov zbroj bude $7k$?

2. Trokut stranica $c = 12$ i kutovi $\alpha = 44° 36'$ $\beta = 72° 18' 32''$ rotira oko pravca koji polazi vrhom c, a paralelan je sa stranicom c. Odredite volumen tijela rotacije.

3. Pravac $4x + y + 8 = 0$ siječe parabolu $y^2 = -16x$. Odredite a) jednadžbe tangenata u presječnim točkama pravca i parabole.

b) jednadžbu kružnice, koja prolazi presjecištima pravca i parabole i presjecištima tangenata,

c) kut pod kojim se sijeku krivulje,

d) odredite na paraboli točku, koja od zadanog pravca ima najveću udaljenost,

e) površinu segmenta na paraboli.

1. *gimnazija, Zagreb*

1. Tangente hiperbole $9x^2 - 25y^2 = 225$ povučene u krajnjim točkama tetive $x = \frac{25}{4}$, dodiruju kružnicu sa središtem u ishodištu. Nađi kružni luk između tangenata.

2. Istokračan trokut rotira oko tangente opisanog kruga, koja je paralelna sa osnovicom trokuta, a ne prolazi vrhom trokuta. Izračunaj volumen i oplošje tijela, ako je b krak, a a osnovica trokuta. Riješi specijalan slučaj, ako je $b = 7{,}4\ cm$, $a = 4{,}6\ cm$.

3. U trokutu, čija je osnovica $2a$, a kutovi na osnovici cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$25^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 y} = 8,\quad 25^{1-\cos 2x} + 9^{1+\cos 2y} = 34,$$

upisuju se krugovi, koji se dodiruju, a središta im se nalaze na visini trokuta. Izračunaj sumu površina svih upisanih krugova; specijalno za $a = 4\ cm$.

2. *gimnazija, Zagreb*

1. Odredi obje površine omeđene lukovima krivulja $y^2 - 4x = 0$ i $(x + 4)^2 + y^2 = 80$!

2. Odredi oplošje i volumen uspravnog stošca upisanog u kuglu, ako je poznato oplošje kugle $O_k = 314{,}159\ cm^3$ i kut na vrhu osnog presjeka stošca $2\alpha = 36° 28' 40''$.

3. Iz središta kružnice, koja prolazi točkama $A(12{,}2)$, $B(13{,}3)$ i $C(15{,}3)$ povučene su tangente na krivulju $x^2 + 4y^2 = 100$.

Odredi površinu trokuta, što ga zatvaraju tangente s pripadnom tetivom i kut pod kojim se ta krivulja vidi iz središta zadane kružnice.

3. *gimnazija, Zagreb*

1. Diferencija aritmetičkog niza je korijen jednadžbe

$$a^{2x}\sqrt{a^{x-13}} = \sqrt[3]{a^x},$$

a zbroj trećeg i četvrtog člana je 51. Koliko članova toga niza daju zbroj 120?

2. Rombu, čiji je šiljasti kut jednak 60°, upisan je krug površine 625π. Odredi volumen tijela, koje nastaje rotacijom romba oko pravca paralelnog sa visinom, a koji prolazi vrhom šiljastog kuta romba.

3. One tangente hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, koje su okomite na asimptote i koje diraju hiperbolu u 1. i 2. kvadrantu, određuju sa asimptotama četverokut. Pokaži, da je četverokut tetivan i odredi njegov opseg, površinu i jednadžbu opisane kružnice.

4. *gimnazija, Zagreb*

1. U sjecištima kružnice $x^2 + y^2 = 16$ i elipse $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ povučene su tangente na elipsu. Nađi jednadžbe tangenata i izračunaj površinu romba što ga čine te tangente.

2. Kako glasi aritmetički niz u kojemu je produkt prvog i četvrtog člana jednak većem korijenu jednadžbe

$$x^{1+\log x} = 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$$

a suma kvadrata drugoga člana i kvadrata trećega člana $a_2^2 + a_3^2 = 65$.

3. U trokutu ABC zadano je:

$a = 3{,}5495$, $b = 11{,}955$, $\gamma = 43° 40' 10''$.

Nađi volumen tijela koji nastaje rotacijom toga trokuta oko osi, koja prolazi vrhom C okomito na stranicu a.

5. *gimnazija, Zagreb*

1. Aritmetički i geometrijski niz imaju prvi član jednak 5, treći članovi tih nizova također su međusobno jednaki, a drugi član aritmetičkog niza je za 10 veći od drugog člana geometrijskog niza. Kako glase ti nizovi?

2. Zadan je trokut ABC stranicama $a = 3{,}5495\ m$, $b = 11{,}955\ m$, i kutom $\gamma = 43° 40' 10''$. Odredi volumen rotacionog tijela koje nastane rotacijom trokuta oko osi koja prolazi vrhom C okomito na stranicu a.

3. Kružnica prolazi točkama $A(6{,}8)$, $B(7{,}1)$ a središte joj se nalazi na pravcu $3y = 4x$. Odredi dužinu luka AB.

6. *gimnazija, Zagreb*

1. Brojevi stranica od tri mnogokuta čine geom. niz, kojeg je zbroj jednak 19. Zbroj svih dijagonala u sva tri mnogokuta je 38. Koji su to mnogokuti?

2. U nepravilnoj četverostranoj piramidi su dijagonale baze $d_1 = 10\ cm$ i $d_2 = 6\ cm$ a kut među dijagonalama $\varphi = 56° 30'$. Nožište visine pada na prvu dijagonalu a pobočni bridovi, koji idu krajnjim točkama te dijagonale, zatvaraju s njom kutove $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. Koliki je volumen piramide?

3. Pravac $x + y + 1 = 0$ je tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ s ekscentricitetom $e = \sqrt{7}$.

Napišite: *a*) jednadžbu hiperbole, *b*) jednadžbu parabole, koju dira ta tangenta, *c*) jednadžbu kružnice, kojoj se središte nalazi u točki S (0,2) i kojoj je tangenta zajednička tangenta parabole i hiperbole.

Dokažite, da dirališta tangente kružnice raspolovlja spojnicu dirališta tangenata hiperbole i parabole.

7. *gimnazija, Zagreb*

1. Neka se istraži tok ove funkcije i nacrta pripadna slika: $y = \dfrac{16x}{x^2 - x + 4}$.

2. Na izgradnji autoputa treba odrediti duljinu trase AB, kojoj je kraj B nepristupačan i ne vidi se iz A. U tu svrhu izmjeri se dužina $CD = 400\ m$, $AD = 180\ m$ na istom pravcu. Iz krajeva dužine CD vidi se trasa pod kutovima

$$\sphericalangle ACB = 39^\circ 25' \text{ i } \sphericalangle ADB = 62^\circ 56'$$

(Sve dane točke leže u istoj horizontalnoj ravnini).

3. Hiperbola, čija je os $2a = 16$ prolazi $A\left(10, \dfrac{9}{2}\right)$. Oko desnog fokusa opisana je kružnica, koja dodiruje asimptote hiperbole. Treba odrediti:

a) sjecišta hiperbole i kružnice,

b) površinu lika čiji su vrhovi ishodište, dirališta asimptota i kružnice i desni fokus hiperbole,

c) pripadnu konstrukciju.

8. *gimnazija, Zagreb*

1. Odredi brojeve a, b, c tako da funkcija

$$y = \frac{1}{8}(2x^3 + ax^2 + bx + c)$$

poprimi za $X = -2$ maksimum, za $X = 3$ minimum, a za $X = 5$ vrijednost $\dfrac{1}{2}$, pa onda načinite pokus i funkciju predočite grafički u intervalu $-6 < X < 6$.

2. Pravac $3x - 5y + 25 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i parabole $y^2 = 2px$, koja sa elipsom ima zajednički fokus. Dokazati da je trokut komu su vrhovi: fokus i dirališta tangente na elipsi i paraboli, pravokutan. Konstrukcija slike.

3. Kugli $R = 4\sqrt{3}$ upisana je pravilna šesterostrana piramida, kojoj je baza od središta kugle udaljena za $d = \dfrac{R}{2}$.

Odrediti radius one kugle, u koju se može ta piramida pretaliti.

9. *gimnazija, Zagreb*

U 7. gimn. bile su predložene i ove teme:

I.

1. Tri ceste sijeku se tako, da čine pravokutni trokut, kojemu je opseg 48 *km*. Dva čovjeka prelaze od presjeke cesta, koje su katete, jedan po jednoj, drugi po drugoj cesti. Dok jedan pređe 130 *m*, drugi pređe 110 *m*. Kolika je svaka od tih cesta, ako se oba čovjeka sastanu u sredini hipotenuze?

2. U istokračnom trokutu je baza $a = 12\ cm$, a kut, koji leži na bazi je $78^\circ 20' 10''$. Nađi volumen tijela, koje nastaje rotacijom istokračnog trokuta oko tangente kružnice opisane oko tog trokuta a ta je tangenta paralelna s visinom.

3. U točkama $M_1(4, y > 0)$ i $M_2(9, y < 0)$ parabole $y^2 = 4x$ povučene su tangente, koje se sijeku u točki M_3. Nađi jednadžbu kružnice, koja prolazi kroz te tri točke i nađite kut pod kojim siječe kružnica parabolu u I. kvadrantu.

II.

1. Zadana je jednadžba

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} = 1,$$

gdje je a realni parametar.

Treba pokazati da su korijeni zadane jednadžbe realni ma koliko bilo realno a.

Treba odrediti veličinu a tako, da bude $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = k$, gdje je k realni broj.

Koje vrijednosti može imati k, da bi odgovarajuće vrijednosti parametra a bile realne?

2. Stranica istostraničnog valjka zadana je jednadžbom

$$\sqrt{2x + 2} + \sqrt{7 + 6x} = \sqrt{7x + 2}.$$

Valjku treba upisati stožac i kuglu. Kako se odnose volumeni tih tijela?

3. Pravac $5y - 3x = 25$ zajednička je tangenta elipse i konfokalne parabole. Pod kojim se kutom iz zajedničkog fokusa vidi dio tangente između oba dirališta?

ISPRAVI! U članku »Iz teorije skupova« u broju 2. Matematičko-fizičkog lista od ove godine u znakovima $\subseteq$ odnosno $\supseteq$ donja crtica je slabo ili nikako uočljiva. Stoga, da ne bi bilo zabune, molimo da stavite $\subseteq$ mjesto $\subset$ i $\supseteq$ mjesto $\supset$ na ovim mjestima:

§ 4., § 5. i legende uz slike 6. i 7. — svuda.

§ 8. — svuda osim u vježbi iza riječi »koje« i u posljednjem retku.

§ 9. r. 5.

§ 11. 2. 1.

Matematička ukrštenica

Slobodan Milojković, uč. 4. r. g., Niš

U svako kvadratno polje ne dolazi po jedno slovo, već po jedna arapska cifra! Decimalne zapete ne treba unositi.

Vodoravno:

1. Vrednost izraza $4a^3+13a^2b+8ab^2+11b^3+1$, ako su a i b koreni jednačine $x^2-17x+72=(a>b)$
5. $\sqrt{18225}$
7. Deseti član aritmetičkog niza, ako je prvi 5, a šesti 20
8. Zbir prvih 10 članova aritm. progresije, ako je $a_2=198$, $a_7=688$
10. Visina romba kome je ugao 30°, a površina 7104,32
12. Upisati dimenzije pravougaonika najveće površine s obimom 228
14. Sračunati izraz

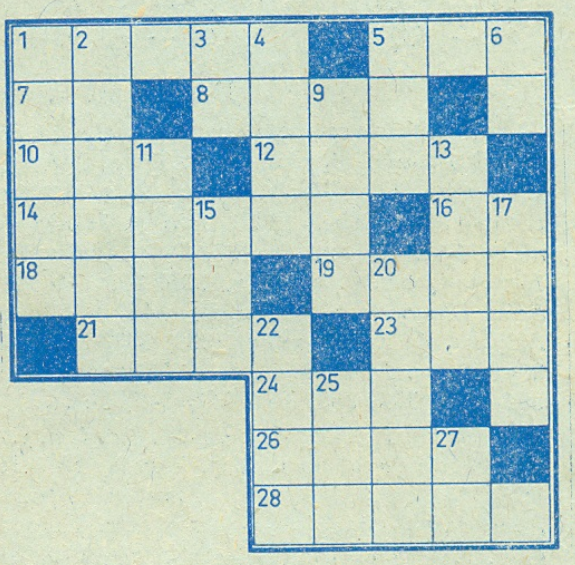
$$\left[\sqrt[3]{a}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{a^{-1}}\right)^2\right]:\left(\overline{a^{-1}}\cdot\sqrt[4]{a}\right)$$

za $a=47{,}08$

16. Broj vrhova pravilnog poligona, čiji je ugao 173° 20′
18. Površina bazisa piramide, kojoj je visina 25, dok je površina poprečnog preseka, udaljenog za 5 od vrha, a paralelnog bazisu, jednaka 118
19. Volumen valjka nagnutog prema osnovi za 30°, ako je površina bazisa 139, a bočna ivica 80
21. Površina trougla, što ga prava $x+2y-98=0$ čini s koordinatnim osama
23. Poluprečnik prave kupe, ako je bočna ivica 40, a površina omotača 1164π
24. Strana a u trouglu, ako je $\alpha=36°$, $\beta=84°$, $c=77{,}5$
26. Proizvod korena jednačine $\frac{132-x}{12}=\frac{363}{x}$
28. Broj od koga 15% iznosi 12606

Uspravno:

1. Zapremina valjka s poluprečnikom 8 i površinom omotača 5878
2. Logaritam strane ravnostranog trougla, ako mu je površina $96{,}334\cdot\sqrt{3}$
3. a_{15} aritm. niza, ako je $a_6=2a_2$, $a_5=35$
4. Površina trougla ABC, ako je $A(3{,}1;\ 9{,}1)$, $BC\equiv 7x+17y+114=0$, visina $h_{AB}\equiv x+y+2=0$
5. Veće m iz uslova da prava $(m-8{,}5)x-y+7=0$ gradi s pravom $x-3y-6=0$ ugao od 45°
6. Broj dijagonala u 12-ouglu
9. Volumen valjka visine $7{,}8/\pi$ upisanog u pravu prizmu, čija je osnova jednakokraki trapez s osnovicama 18 i 50
11. Površina trougla kome je poluobim 12, a poluprečnik upisanoga kruga 5,295
13. $x=\dfrac{82{,}166\cdot\sqrt[3]{0{,}00355}}{0{,}72\cdot 0{,}23}$
15. $\log_x 90000=2$, $x=$?
17. Četvorocifren broj $abcd$, ako je $a+b+c+d=5$, $b=d$, $a-b=4$, $a-c=3$



20. Volumen prave prizme, čiji je bazis trapez sa većom osnovicom $a=45$, opisane oko valjka poluprečnika 15 i visine 54
22. Strana b u trouglu, ako je $a=17{,}52$; $\beta=62°$ i $\alpha-\gamma=57°\,40'$
25. Broj oblika $100(n+1)+10(n+2)+n+3$ za $n=1$
27. Proizvod $(x_1x_2y_1y_2)$ korena sistema $x^2+y^2-xy=12$, $x+y=6$

Rešenje poslati do 25. IV. 1959. Na kuverti naznačiti: „Matematička ukrštenica“. Između učenika koji pravilno reše ukrštenicu, ždrebom će se odrediti njih 10 i nagraditi matematičkim knjigama. Rešenje ukrštenice i popis nagrađenih objaviće se u narednom broju.

Ukrštenica se ne mora izrezivati; dovoljno je rešenje na posebnom papiru, čitljivo potpisanom.

Решење укрштенице из бр. 2 и награђени решаваоци

Водоравно:		*Усправно:*	
2 —	1,49136	1 —	211519
6 —	1536	2 —	1319
8 —	61	3 —	46
9 —	1,41	4 —	164
10 —	24;11	5 —	3,111
12 —	997	7 —	54
14 —	14	10 —	270
15 —	17	11 —	142857
17 —	906	13 —	999
19 —	9999	16 —	7983
21 —	448	18 —	6440
23 —	89	20 —	993
24 —	6435	22 —	43
25 —	633750	24 —	65

До 15. II. стигло је 301 решење. Од тога је 150 правилних. Књигом Sevdić: »Matematička čitanka« награђени су:

1. Брица Јосип, 4б р. VII. г. Загреб
2. Имамовић Муневер, 2а р. г. Градачац
3. Ивезић Томислав, 2 р. г. Вировитица
4. Кочуник Ерик, 2е р. т. ср. ш. Марибор
5. Крстева Бојка, 8а учил. »Т. Андреев« Титов Велес
6. Лазовић Светомир, 2_2 р. г. Бијело Поље
7. Летић Милан, 4е раз. г. »М. Пијаде« Суботица
8. Ранковић Евица, 8 р. XV г. Београд
9. Стошић Љубомир, 7_2 разред. гимн. »Б. Станковић« Врање
10. Тимотић Слободан, M_{22} ср. т. ш. Ваљево

Накнадно стигла ова рјешења:

a) iz matematike: *Миловановић Ранко*, 3_3 р. г. Алексинац, 335, 339 (дел.), 348; *Пузић Радивој*, 4_1 раз. гимн. Рума, 348; *Стојановска Слободанка*, 3а кл. г. »Г. Делчев«, Куманово, 338; *Fehér Kamilo*, 2_4 r. g. Sombor, 335, 338, 346, 347; *Fill Ferenc*, 2_4 r. g. Sombor, 346 (djel.), 347; *Indikar Stanko*, 3. r. g. Kočevje, 338, 339 (djel.), 348; *Josić Danilka*, 4_1 r. g. Sombor, 337, 348; *Limburger Maćaš*, 4_4 raz. g. Sombor, 338, 346, 348; *Mere Ištvan*, 4_6 raz. g. Sombor, 335, 338, 346, 347, 348; *Parčilna Roža*, 2_4 raz. g. Sombor, 347; *Šefer Ištvan*, 4_6 r. g. Sombor, 346, 347; *Teglaš Jene*, 4_6 raz. g. Sombor, 346, 347; *Vračarić Mirjana*, 4a r. g. Sombor, 335, 337, 347, 348; *Драшковић Радоје*, 4с раз. г. Цетиње, 337, 338; *Кирић Миодраг* 3_3 р. г. Зрењанин, 335, 338, 348; *Suljagić Salih*, 3.c r. 5. g. Zagreb, 335, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 348.

b) iz fizike: *Bajtarević Ahmed*, 4. r. g. Visoko, 166 (djel.), 167, 168 (djel.), 169, 170; *Hendeković Josip*, 4b r. 2. g. Zagreb, 167, 168, 170; *Lojen Miroslav*, 4a r. g. Varaždin, 166, 167, 168 (djel.), 169, 170; *Mesihović Behđed*, 3_2 raz. gim. Mostar, 166, 167, 168, 169, 170; *Радовановић Нинослав*, 4_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 166, 167, 170; *Шушић М. Томислав*, 4_4 р. г. Чачак, 166, 167, 168, 169, 170; *Suljagić Salih*, 3.c r. 5. g. Zagreb, 170.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi za članove društava matematičara i fizičara 300 Din, a za škole i biblioteke 400 Din. Pretplatu i narudžbe slati (sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.«) na žiro račun »Nastave matematike i fizike« 101-701-5-1262, Beograd.

Za NRH pretplata se šalje na ček. upl. 400-73-3-1133 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1959. god. iznosi Din 600, za ustanove Din 1000 i šalje se na administraciju GLASNIKA: Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.

Cekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH

Godišnja članarina za Društvo je Din 300. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 300